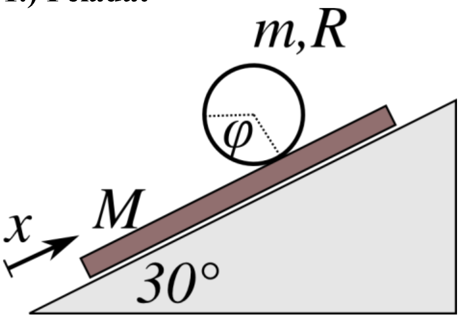
MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	Nagy ZH 2 (máj 13.)

Név:________________________

Neptun:______________________

1.) Feladat



Egy *30°* hajlásszögű súrlódásmentes lejtőn egy hosszú, *M* tömegű deszka csúszhat szabadon. A deszka tetejére helyeztünk egy *m* tömegű *R* sugarú vékony falú hengert, ami a deszkához jól tapadva tisztán gördülhet. Az így kialakult két szabadsági fokú rendszer helyzetét a deszka *x* elmozdulásával és a korong *φ* elfordulásával jellemezzük, a rendszer Lagrange-függvénye:

$$L(x,\varphi,\dot{x},\dot{\varphi})=\frac{M}{2}\dot{x}^2+\frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{m}{2}(R\dot{\varphi}+\dot{x})^2-\frac{Mg}{2}x-\frac{mg}{2}(x+R\varphi)$$

a.) Írja fel a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenleteit!

b.) Tekintse az alábbi transzformációt:

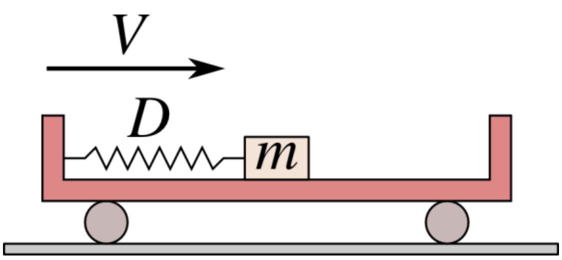
$$x\to X(x,s)=x+s$$

$$\varphi\to\Phi(\varphi,s)=\varphi-a\,s$$

Mekkorának válasszuk az „*a*” konstans értékét, ha azt szeretnénk, hogy a transzformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt, azaz szimmetria legyen?

c.) Válassza az „*a*” konstans értékét az a.) feladatnak megfelelően úgy, hogy a transzformáció szimmetria legyen! Noether tétel segítségével adja meg a szimmetriához tartozó megmaradó mennyiséget!

2.) Feladat



Egy igen nagy, végtelennek tekinthető tömegű vasúti kocsi *V* sebességgel gurul egy egyenes vasúti pályán. A vasúti kocsi egyik végéhez a haladási iránnyal párhuzamosan rögzítettünk egy *D* rugóállandójú rugót és annak végére egy *m* tömegű testet helyeztünk. A rendszer (időfüggő) Hamilton-függvénye:

$$H(x,p,t)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}D(x-Vt)^2$$

Szeretnénk áttranszformálni a vasúti kocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerbe, azaz végrehajtani az alábbi transzformációt:

$$X=x-Vt$$

$$P=p-mV$$

a.) Fejezze ki a régi „*p*” impuzlust és az új „*X*” koordinátát, mint „*x*”, „*P*” és „*t*” függvényét!

b.) Szeretnénk találni egy „2”-es típusú $W_2(x,P,t)$ alkotófüggvényt, ami a fenti transzformációt hajtja végre. Adja meg a $\frac{\partial W_2(x,P,t)}{\partial x}$ és $\frac{\partial W_2(x,P,t)}{\partial P}$ deriváltakat!

c.) Adjon meg egy a b.)-ben kapott feltételeknek megfelelő $W_2(x,P,t)$ függvényt!

d.) Fejezze ki az új $K(X,P)$ Hamilton-függvényt, és mutassa meg, hogy nem függ explicit módon az időtől!

e.) Mivel $K(X,P)$ nem függ explicit módon az időtől, ezért mozgásállandó. Az azonban, hogy valami mozgásállandó, nem függhet attól, milyen változók szerint van kifejezve. Fejezze ki a *K* függvényt a régi „*x*”, „*p*” változók és „*t*”segítségével!

f.) Számítsa ki a $[H(x,p,t),K(x,p,t)]$ Poisson zárójelet! Ez alapján mutassa meg, hogy *K* a régi változók szerint is mozgásállandó! (Vigyázzon, a *K* függvény a régi változók szerint kifejezve explicit módon függ az időtől!)

3.) Feladat

Két egyforma *m* tömegű tömegpont az *x* tengely mentén mozoghat, őket *D* rugóállandójú rugó köti össze. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\frac{1}{2}D(x_2-x_1)^2$$

a.) Írja fel a rendszer teljes (időfüggő) Hamilton-Jacobi egyenletét az $S(x_1,x_2,t)$ hatásfüggvényre!

b.) A szoksásos $S(x_1,x_2,t)=S_0(x_1,x_2,E)-Et$ szeparálást elvégezve írja fel a rendszer rövidített Hamilton-Jacobi egyenletét!

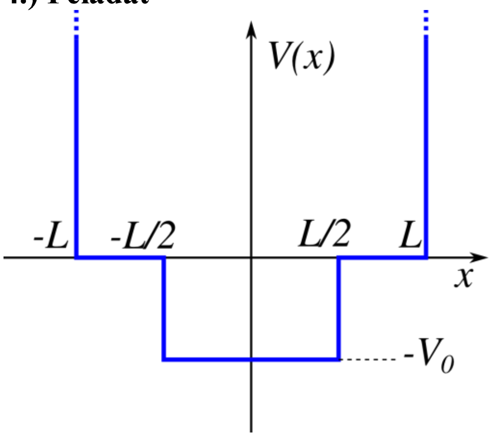
c.) Ahhoz, hogy tovább szeparálhassa az egyenletet, térjen át az $X=\frac{x_1+x_2}{2}$ és $Y=x_2-x_1$ változókra! Írja fel a rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet az $S_0(X,Y,E)$ függvényre!

d.) Láthatja, hogy az *X* változó könnyen szeparálható: $S_0(X,Y,E)=S_Y(Y,E,\alpha)+\alpha X$. Írja fel az S_Y-ra vonatkozó egyenletet!

e.) Adja meg az $S_Y(Y,E,\alpha)$ függvényt! Írja fel az időfüggő egyenlet teljes $S(x_1,x_2,E,\alpha,t)$ megoldását!

segítség: $\int dx\sqrt{A-Bx^2}=\frac{A}{2\sqrt{B}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{B}{A}}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{A-Bx^2}$

4.) Feladat



Egy részecske az *x* tengely mentén mozoghat az ábrán is mutatott *V(x)* potenciálban:

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & ha \quad |x|>L\\ 0, & ha \quad L>|x|>L/2\\ -V_0, & ha \quad |x|<L/2\end{cases},$$

Azaz egy *2L* hosszúságú végtelen mély potenciáldoboz közepén található egy *L* hosszúságú V_0 mélységű gödör. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(x)$$

a.) Először tekintsen egy *E<0* energiájú mozgást. Rajzolja fel a *p-x* fázissíkra az ezen mozgás által befutott fázistrajektóriát!

b.) Határozza meg az *I* hatásváltozót *E<0* energiájú mozgás esetén, azaz fejezze ki az *I(E)* függvényt az *E<0* tartományon!

c.) Most tekintsen egy *E > 0* energiájú mozgást. Rajzolja fel a *p-x* fázissíkra az ezen mozgás által befutott fázistrajektóriát!

d.) Határozza meg az *I* hatásváltozót *E>0* energiájú mozgás esetén, azaz fejezze ki az *I(E)* függvényt az *E>0* tartományon.

e.) Rajzolja fel az *I(E)* függvényt!

f.) Az *I(E)* függvény deriválásával határozza meg a mozgás *T* periódusidejét az *E* energia függvényében!

g.) Ábrázolja a *T(E)* függvényt!