MECHANICS 2 (2017/18 spring)	HW 9

Small test problems

HW9/1

The Hamiltonian of a 2-dimensional isotropic harmonic oscillator reads as

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2).$$

Consider the following quantities

$$S_1 = \frac{p_x p_y + m^2\omega^2 x y}{2m\omega}, \quad S_2 = \frac{p_y{}^2 - p_x{}^2 + m^2\omega^2 (y^2 - x^2)}{4m\omega}, \quad S_3 = \frac{1}{2}(x p_y - y p_x).$$

a.) Determine the following derivatives!

$$\frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial p_y}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial p_y}$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial S_3}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial S_3}{\partial p_y}$$

b.) Show that the Poisson brackets of the above defined quantities are $[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k$, i.e. test the following three relations

$$[S_1, S_2] = S_3\,, \qquad [S_2, S_3] = S_1\,, \qquad [S_3, S_1] = S_2\,.$$

Which well known physical quantity follows similar Poisson-bracket rules?

c.) EXTRA! (Will not be asked in a small test) Prove the following relation between the Hamiltonian and the S's: $H^2 = 4\,\omega^2\,(S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2)$!

HW9/2

A free particle can move along the x-axis. Its Hamiltonian is trivially

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m}.$$

Consider the following quantity, that depends explicitly on the time:

$$F(p, x, t) = x - \frac{t}{m} p\,.$$

a.) Calculate the Poisson bracket $[F,H]$ (warning: it is non-zero!), and show that it is a constant of motion, i.e. $\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

b.) In the class we learned that for a constant of motion there exists a corresponding symmetry, generated by the conserved quantity. In order to determine the symmetry generated by F, we have to analyze the following equations

$$\frac{dx}{ds} = [x, F],$$

$$\frac{dp}{ds} = [p, F].$$

Calculate the Poisson brackets on the right-hand side

c.) Integrate the equations of b.) with respect to s, and determine the $x(s)$ and $p(s)$ expressions. Let the initial conditions be $x(s=0) = x_0$ and $p(s=0) = p_0$.

You can see that $x(s)$ and $p(s)$ expressions give the usual Galilei transformation rules, that is indeed a symmetry of a system consisting of a free particle.

Problems for practice

Gy9/1

The Hamiltonian of a system with one degree of freedom reads as

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}.$$

a.) Show that the following (explicitly time-dependent) quantity is a constant of motion, i.e. it's value during the Hamiltonian time evolution is constant,

$$D = \frac{pq}{2} - H(p,q)t.$$

b.) Consider a possible two-dimensional generalization of the problem,

$$H = |\mathbf{p}|^n - a|\mathbf{r}|^{-n}.$$

Here **r** and **p** are two-dimensional (x-y) vectors. Show that the following quantity is a constant of motion,

$$D = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{n} - Ht.$$

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF9/1

Egy izotrop harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$$

Vezessük be az alábbi mennyiségeket:

$$S_1 = \frac{p_x p_y + m^2\omega^2 xy}{2m\omega}, \quad S_2 = \frac{p_y{}^2 - p_x{}^2 + m^2\omega^2(y^2 - x^2)}{4m\omega}, \quad S_3 = \frac{1}{2}(xp_y - yp_x)$$

d.) Határozza meg a következő deriváltakat:

$$\frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial S_1}{\partial p_y}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial p_y}$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial S_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial S_3}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial S_3}{\partial p_y}$$

e.) Mutassa meg, hogy $[S_i, S_j] = \varepsilon_{ijk} S_k$, azaz igazolja az alábbi három Poisson-zárójel összefüggést:

$$[S_1, S_2] = S_3\,, \qquad [S_2, S_3] = S_1\,, \qquad [S_3, S_1] = S_2$$

Milyen jól ismert fizikai mennyiségnek vannak hasonló Poisson-zárójelei?

f.) EXTRA! (kisZH-n nem lesz) Mutassa meg, hogy $H^2 = 4\,\omega^2\,(S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2)$!

HF9/2

Egy részecske szabadon mozoghat az x tengely mentén, a Hamilton függvénye triviális módon:

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m}.$$

Tekintse az alábbi, explicit módon időfüggő fizikai mennyiséget:

$$F(p,x) = x - \frac{t}{m} p\,.$$

d.) Számítsa ki az $[F,H]$ Poisson-zárójelet (vigyázat, ez nem tűnik el!), és mutassa meg, hogy F mozgásállandó, azaz $\frac{dF}{dt} = [F,H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

e.) Mint gyakorlaton szerepelt a megmaradó mennyiségek mindig szimmetriákat generálnak. Ahhoz, hogy meghatározzuk, mit generál F, az alábbi egyenleteket kell megvizsgálnunk:

$$\frac{dx}{ds} = [x, F]$$

$$\frac{dp}{ds} = [p, F]$$

Fejezze ki a jobboldalon megjelenő Poisson-zárójeleket.

f.) A b.)-ben kapott egyenletek s szerinti integrálásával adja meg az $x(s)$ és $p(s)$ kifejezéseket, ahol az $x(s=0) = x_0$ és $p(s=0) = p_0$ „kezdeti feltételeket" használhatja.

Láthatja, hogy az $x(s)$ és $p(s)$ kifejezések éppen a Galilei-féle transzformációs összefüggéseket adják, amik valóban szimmetriái egy szabad részecske mozgásának.

Gyakorlófeladatok

Gy9/1

Egy egy szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye:

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}$$

c.) Mutassa meg, hogy az alábbi (explicit módon időfüggő) mennyiség időállandó, azaz értéke a mozgás során állandó!

$$D = \frac{pq}{2} - H(p,q)t$$

d.) Tekintse a probléma egy lehetséges kétdimenziós általánosítását,

$$H = |\mathbf{p}|^n - a|\mathbf{r}|^{-n}.$$

Mutassa meg, hogy az alábbi mennyiség időállandó:

$$D = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{n} - H\,t$$
