MECHANICS 2 (2017/18 spring)	HW 8

Small test problems

HW8/1

The Lagrangian of a two-dimensional isotropic harmonic oscillator reads as

$$L(x,\dot{x},y,\dot{y})=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2).$$

Consider the following transformation

$$X(x,y,\varphi)=x\cos\varphi+y\sin\varphi$$
$$Y(x,y,\varphi)=-x\sin\varphi+y\cos\varphi$$!

a.) How do the velocities transform?

$$\dot{X}(x,\dot{x},y,\dot{y},\varphi)=?$$
$$\dot{Y}(x,\dot{x},y,\dot{y},\varphi)=?$$

b.) Show that the Lagrangian is invariant under the transformation. (Show, that $L(X,\dot{X},Y,\dot{Y})=L(x,\dot{x},y,\dot{y})$)

c.) Using Noether's theorem, derive the corresponding conserved quantity.

d.) Write down the equations of motion for the system.

e.) Show directly, that the quantity derived in c.) is indeed a constant of motion.

HW8/2

The Hamiltonian of a system with two degrees of freedom reads as

$$H(q_1,p_1,q_2,p_2)=q_1p_1-q_2p_2-Aq_1^2+Bq_2^2,$$

where A and B are real parameters.

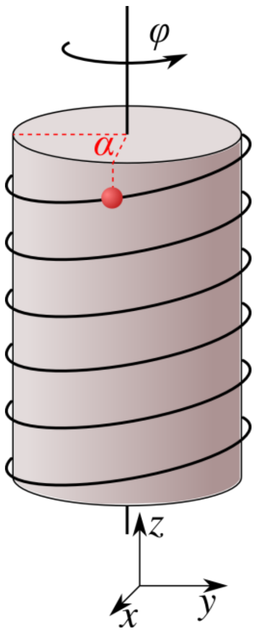
a.) Write down the equations of motion (Hamilton's canonical equations) for the system..

b.) Consider the following quantities,

$$F_1(q_1,p_1,q_2,p_2)=\frac{p_1-Aq_1}{q_2}, \text{ és } F_2(q_1,p_1,q_2,p_2)=q_1q_2$$

Calculate the Poisson brackets $[F_1,H]$ and $[F_2,H]$. Show that both quantities are constants of motion.

c.) Calculate the Poisson bracket $[F_1,F_2]$. Let $F_3=[F_1,F_2]$. Is it a constant of motion?



Problems for practice

Pr8/1

A wire track is fixed to a cilinder (see Figure). A small body of mass m can move without friction on the track The moment of inertia of the cilinder is Θ, and it can rotate around its axis. The position of the system is described by the rotation angle φ of the cilinder and the position α of the body. The gravitational force acts on the body.

The coordinates x,y,z of the small body is descrbied by

$$x=R\sin\alpha$$
$$y=-R\cos\alpha,$$
$$z=C(\alpha-\varphi)$$

where C is the vertical slope of the track.

a.) Construct the Lagrangian of the system.

b.) Show that the following transformation is a symmetry:

$$\alpha'=\alpha+\theta,$$
$$\varphi'=\varphi+\theta$$

c.) Using Noether's theorem, derive the corresponding conserved quantity.
d.) Determine the equations of motion of the system.
e.) At the moment $t=0$ the system starts from the position $\alpha = 0$, $\varphi = 0$ with zero velocities. Solve the equations of motion.
f.) Determine the value of the quantity in c.) and show that it is indeed a constant of motion.

Pr8/2

The Hamiltonian of a two-dimensional isotropic harmonic oscillator reads as

$$H = \frac{p_x^{\ 2}}{2m} + \frac{p_y^{\ 2}}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2).$$

Consider the following (symmetric) matrix ($i, j \in \{x, y\}$)

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}(p_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j),$$

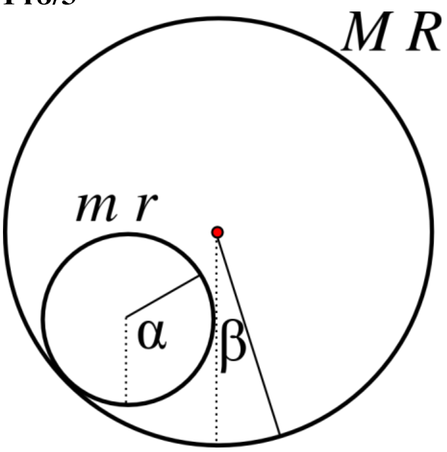
where we used the notation $r_x = x$ and $r_y = y$. This 2x2-es symmetric matric having 3 independent components, A_{xx} A_{xy} and A_{yy}.

a.) Calcuate the Poisson brackets $[A_{xx}, H]$ and $[A_{yy}, H]$, and show that these are conserved quantities. What is the meaning of these quantities?
b.) Calculate the Poisson bracket $[A_{xy}, H]$, and show that it is also a conserved quantity.
c.) Write down the canonical equations of motion.
d.) Search the solution in the following form.

$$x(t) = B\sin(\omega t + \theta_1),$$
$$y(t) = C\sin(\omega t + \theta_2)$$

e.) Determine B and C as a function of the A_{xx} and A_{yy} values.
f.) Determine the phase-difference $\theta_1 - \theta_2$ as a function of A_{xx}, A_{yy}, and A_{xy}.

Pr8/3



Consider the Problem 2.) of class.

a.) Using Legendre transformation determine the Hamiltonian of the system.

b.) Express the conserved quantity, that has been derived in calss, using the canonical momentum and coordinates. Denote it by A.

c.) Calculate the Poisson bracket [A,H], and show that the quantity is indeed conserved.

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF7/1

Egy kétdimenziós izotrop haromikus oszcillátor Lagrange-függvénye az alábbi alakú:

$$L(x,v_x,y,v_y)=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2\right)-\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)$$

Tekintse az alábbi transzformációt:

$$X(x,y,\varphi)=x\cos\varphi+y\sin\varphi$$
$$Y(x,y,\varphi)=-x\sin\varphi+y\cos\varphi$$!

a.) Adja meg a sebességek transzformációját!
$$V_X(x,v_x,y,v_y,\varphi)=?$$
$$V_Y(x,v_x,y,v_y,\varphi)=?$$

b.) Mutassa meg, hogy a fenti transzformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt, azaz szimmetria! (mutassa meg, hogy $L(X,V_X,Y,V_Y)=L(x,v_x,y,v_y)$)

c.) Írja fel a Noether-tételt a fenti szimmetriatranszformációra! Adja meg a szimmetriához tartozó megmaradó mennyiséget!

d.) Írja fel a Lagrange-függvényből kiindulva a rendszer mozgásegyenleteit!

e.) Mutassa meg közvetlenül a mozgásegyenletekből, hogy a c.)-ben nyert mennyiség valóban megmaradó mennyiség!

HF7/2

Egy két szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

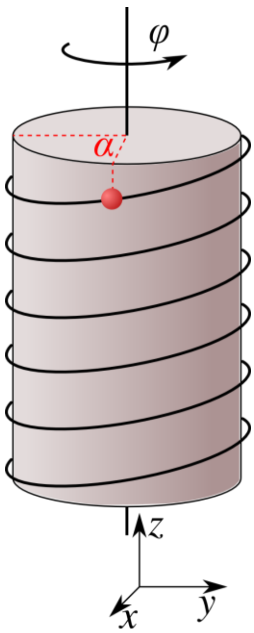
$$H(q_1,p_1,q_2,p_2)=q_1p_1-q_2p_2-Aq_1^2+Bq_2^2,$$

ahol A és B valós állandók.

a.) Adja meg a rendszer Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteit!

b.) Tekintse az alábbi mennyiségeket:
$$F_1(q_1,p_1,q_2,p_2)=\frac{p_1-Aq_1}{q_2},\ \text{és}\ F_2(q_1,p_1,q_2,p_2)=q_1q_2$$
Számítsa ki az $[F_1,H]$ és $[F_2,H]$ Poisson-zárójeleket! Mutassa meg, hogy mindkét mennyiség mozgásállandó!

c.) Számítsa ki az $[F_1,F_2]$ Poisson-zárójelet. Legyen $F_3 = [F_1,F_2]$! Mozgásállandó ez?



Gyakorlófeladatok

Gy7/1

Egy kör alapú hengerre egy spirál alakú drótpályát csévéltünk, amin egy *m* tömegű gyöngyszem súrlódás nélkül mozoghat. A henger tehetetlenségi nyomatéka a szimmetriatengelyére Θ, és a tengely körül könnyen (súrlódás nélkül) elfordulhat. A rendszer helyzetét a henger φ elfordulásával és a gyöngyszem α helyzetével írjuk le. A gyöngyszemre hat a külső gravitációs erőtér is.

A gyöngyszem x,y,z koordinátáit a két szöggel az alábbi módon tudjuk kifejezni:

$$x=R\sin\alpha$$
$$y=-R\cos\alpha,$$
$$z=C(\alpha-\varphi)$$

Ahol C jelöli a spirál menetemelkedését.

a.) Konstruálja meg a rendszer Lagrange-függvényét!
b.) Mutassa meg, hogy az alábbi szimmetriatranszformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt:
$\alpha' = \alpha + \theta$,
$\varphi' = \varphi + \theta$
c.) Adja meg a szimmetriához tartozó Noether-féle mozgásállandót! Milyen jól ismert fizikai mennyiséget kapott?
d.) Írja fel a rendszer mozgásegyenleteit!
e.) A *t=0* időpontban az $\alpha = 0$, $\varphi = 0$ pontból indítjuk a rendszert, álló helyzetből. Adja meg a mozgásegyenletek megoldását!
f.) Adja meg a c.)-ben kapott mozgásállandó értékét az e.) feladat adatai esetén, és mutassa meg, hogy valóban állandó az időben!

Gy7/2

Egy kétdimenziós izotrop harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi:

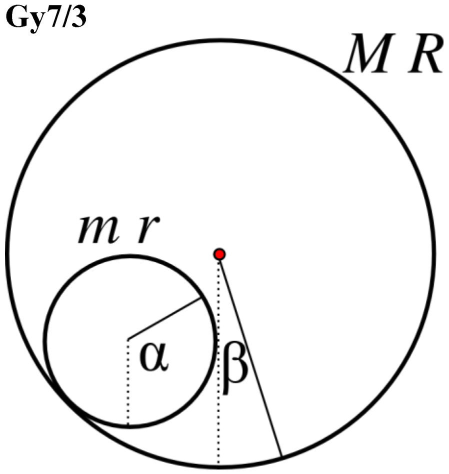
$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) .$$

Tekintse az alábbi mátrixot! ($i, j \in \{x, y\}$)

$$A_{ij} = \frac{1}{2m}\left(p_i p_j + m^2\omega^2 r_i r_j\right),$$

ahol az $r_x = x$ és $r_y = y$ jelölést használtuk. Ez láthatóan egy 2x2-es szimmetrikus mátrix, benne ezért három független mátrixelem található.
a.) Számítsa ki az $[A_{xx},H]$ és $[A_{yy},H]$ Poisson-zárójeleket, és ezzel bizonyítsa be, hogy a mátrix diagonális elemei megmaradó mennyiségek. Mit írnak le?
b.) Számítsa ki az $[A_{xy}, H]$ Poisson zárójelet, és bizonyítsa be, hogy ez is megmaradó mennyiség!
c.) Írja fel a rendszer Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteit!
d.) A megoldást keresse az alábbi alakban:
$x(t) = B\sin(\omega t + \theta_1)$,
$y(t) = C\sin(\omega t + \theta_2)$
e.) Fejezze ki a *B* és *C* konstansokat az A_{xx} és A_{yy} segítségével!
f.) Fejezze ki a $\theta_1 - \theta_2$ különbséget A_{xx}, A_{yy} és A_{xy} segítségével!

Gy7/3



Tekintse a 8. gyakorlat 2. Feladatát!
a.) A Lagrange-függvény Legendre-transzformációjával Határozza meg a Hamilton-függvényt!
b.) Fejezze ki a gyakorlaton levezetett Noether-féle megmaradó mennyiséget (jelöljük A-val!) a kanonikus impulzusok és koordináták segítségével!
c.) Számítsa ki az [A,H] Poisson zárójelet, és ezzel bizonyítsa ismét, hogy A egy megmaradó mennyiség!
