MECHANICS 2 (2017/18 spring)	HW 4

Small test problems

HW4/1

A particle of resting mass m and electric charge q moves in a homogeneous electric field whose strength is E. The field points in the y direction while the particle's velocity is initially $v_0 = 0.8c$ and points in the x direction.

a.) Determine the initial (usual) momentum vector of the particle.
b.) Write down the relativistic equations of motion for the particle's momentum vector. Solve the equation, i.e. determine the particle's momentum as a function of time.
c.) Consider the moment when the x and y components of the particle's momementum are equal. Determine the particle's p^μ 4-momentum in that moment. Use the known Minkowski-length of the 4-momentum for a particle of restung mass m.
d.) What is the particles velocity vector in that moment? What are the x and y coordinates of the velocity?

HW4/2

The model of a relativistic rocket has been considered in class. Now you have to generalize the results for the model of a „photonic-rocket". The initial resting mass of the rocket is M_0. The power unit emits a strong photon ray, that accelerates the rocket. The rocket starts from rest, and moves along the x axis.

a.) Consider the moment, when the resting mass of the rocket is M. Sit in the (instantaneously) comoving frame of the rocket. The power unit emits photons of energy $d\varepsilon$, i.e. the 4-momentum of the emitted photons is $dp^\mu = (\frac{d\varepsilon}{c}, -\frac{d\varepsilon}{c}, 0, 0)$. Write down the 4-momentum conservation for the process.
b.) Determine the dM change in the rocket's resting mass.
c.) Determine the dv change in the rocket's velocity (seen from the instantaneously comoving frame). Convert it to the change of rapidity $d\theta$.
d.) What is the velocity of the rocket when it has lost half of its resting mass?

Problems for practice

PR4/1 A particle of resting mass m_0 and charge q moves in a homogeneous magnetic field B that points in the z direction. $\vec{B} = (0, 0, B)$. The initial velocity of the particle in $t = 0$ is $\vec{v_0} = (0, \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}})$, i.e. it is not perpendicular to the magnetic field.

a.) Write down the relativistic equations of motion.
b.) Show (similarly to class) that the size of the particles (usual) velocity vector is constant.
c.) Using that, write down the equations of motion for $\frac{d\vec{v}}{dt}$.
d.) Show that the following expression solves the equations, and it is also compatible with the initial conditions.

$$\mathbf{v}(t) = \left(-\frac{v_0}{\sqrt{2}}\sin(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}}\cos(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$$

What is Ω?
e.) Sketch the trajectory of the particle qualitatively.
f.) For practice, solve the whole problem using the covariant form of the equations of motion:

$$m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = qF^\mu_{\ \nu} u^\nu$$

KisZh-án szerepelhető feladatok

HF4/1

Egy m nyugalmi tömegű q töltésű részecske homogén E erősségű elektromos térben mozog. A térerősség az y irányba mutat, a részecske kezdetben $v_0 = 0.8c$ sebességgel halad az x irányba. Írja le a részecske mozgását.

a.) Adja meg a részecske kezdeti szokásos impulzisvektorát.

b.) Írja fel a relativisztikus mozgásegyenletet a részecske impulzusára. Oldja meg az egyenletet, azaz adja meg a részecske impulzusát az idő függvényében.

c.) Tekintse azt az időpontot, amikor a részecske x és y irányú impulzusa egyenlő nagyságú. Adja meg ekkor a részecske p^μ négyesimpulzusát. Ehhez használja fel, hogy ismeri egy m nyugalmi tömegű részecske négyesimpulzusának Minkowski-hosszát.

d.) Mekkora a részecske sebessége ebben a pillanatban? Mekkora a részecske sebességének x és y irányú komponense?

HF4/2

Gyakorlaton szerepelt a relativisztikus rakéta modellje. Ezt általánosítva most a „fotonrakéta" modelljét kell vizsgálnia. A rakéta kezdeti nyugalmi tömege M_0, a rakéta hajtóműve egy igen intenzív fotonnyalábot bocsájt ki, ez biztosítja a meghajtást. Az egyszerűség kedvéért a rakéta mozogjon egyenes pályán!

a.) Tekintse azt a pillanatot, amikor a rakéta nyugalmi tömege M. Üljön be a rakétával (pillanatnyilag) együttmozgó rendszerbe. A hajtómű kisugároz $d\varepsilon$ fotoenergiát, azaz a kisugárzott fotonok négyesimpulzusa $dp^\mu = (\frac{d\varepsilon}{c}, -\frac{d\varepsilon}{c}, 0{,}0)$. Írja fel a négyesimpulzus-megmaradást a folyamatra.

b.) Adja meg a rakéta nyugalmi tömegének megváltozását.

c.) Adja meg az előbbi esetben a rakéta dv sebességváltozását! Ebből adja meg a rakéta $d\theta$ rapiditásváltozását is!

d.) Adja meg, mekkora lesz a rakéta sebessége, amikorra elveszíti a nyugalmi tömege felét!

Gyakorlófeladatok

Gy4/2 feladat Egy q töltésű m_0 nyugalmi tömegű részecske homogén, z-irányú, $\mathbf{B} = (0,0,B)$ mágneses indukciójú térben mozog. A részecske sebessége a t=0 időpontban $\mathbf{v}_0 = \left(0, \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$, azaz nem merőleges a mágneses tér irányára. Írja le a részecske mozgását!

a.) Írja fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

b.) Mutassa meg, hogy a részecske szokásos (hármas) sebességvektorának nagysága az időben állandó.

c.) Ezt felhasználva írja fel a mozgásegyenletet $\frac{dv}{dt}$-re!

d.) Mutassa meg, hogy az egyenlet kezdeti feltételeknek is megfelelő megoldása az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{v}(t) = \left(-\frac{v_0}{\sqrt{2}}\sin(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}}\cos(\Omega t), \frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)$$

Adja meg Ω értékét!

e.) Hozzávetőlegesen rajzolja fel a részecske háromdimenziós pályáját!

f.) Gyakorlásként oldja meg a feladatot az órán is látott relativisztikusan kovariáns egyenlet segítségével:

$$m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = qF^\mu_{\ \nu} u^\nu .$$

Mik a kezdeti feltételek?