MECHANICS 2 (2017/18 spring)	HW 2.

Small test problems:

HW 2/1

The π-mesons (π^+ vagy π^-) are unstable particles that decay with half time $T_{1/2} = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ s in the reference frame where they rest. We have produced a ray of π-mesons, where the particles' velocity is 0.8c.

a.) What half-time do we measure for the mesons?
b.) Let's assume we drive the π-mesons trough a tunnel of length d = 36 m. What fraction of the particles decay in the tunnel?
c.) What result would we get if we used non-relativistic approximation?
d.) What is the length of the tunnel in the π-mesons' frame of reference?
e.) (*) How long does it take (from the particles point of view) to cross the tunnel?
f.) (*) What fraction of them decay in the tunnel, if we calculate in the reference frame of π-mesons?

(Questions denoted by * are just for practice. They will not appear in small tests.)

HW 2/2

Consider the following space-time transformation:

$$\Lambda^{\mu}_{.\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) There is a 4-vector: $b^{\mu} = (5, 4, 0, 3)$. Transform this vector using the above transformation and write down the b'^{μ} transformed coordinates!
b.) Determine the Minkowski length-square of the original vector b^{μ}.
c.) Determine the Minkowski length-square of the transformed vector b'^{μ}, and show that it remained invariant.
d.) Show in general that the transformation is a Lorentz transformation.

Problems for practice:

Pr 2/1

A pair of twins (Arnold and Bruce) have bought two interstellar spacecrafts.

- After departing from Earth, Arnold accelerates to 0.5c and then with constant velocity he travels to the Alpha-Centauri system, where he lands on an exo-planet.
- Bruce chooses a slightly different schedule. He accelerates to 0.99c, but at half way he stops in the motel that was also mentioned in class. After a (long) holiday he accelerates again to 0.99c and arrives to the Alpha Centauri at the same time as Arnold.

a.) Draw the world lines of Arnold and Bruce in the Minkowski plane.
b.) How much time does it take (measured in the Earth) for Arnold and Bruce to reach their destination?
c.) What is the aging of Arnold?
d.) How much time does it take for Bruce to reach the motel?
e.) How much time does Bruce spend in the motel?
f.) What is Bruce's total aging?

Pr 2/2

The space destroyer of the tall blond aliens broke down, and now it travels with constant velocity in space. Their worst enemies, the small greys, in their space station realize the great opportunity, and target the blonds' destroyer. The scientists of the greys' space station have calculated that the destroyer will pass the space station with minimal distance of d, and its velocity is 0.5c. They also calculated the time, when they have to shoot, if they want to hit the destroyer closest to the space station. In their calculations they use the reference frame of the space station, but they put the origin to the explosions position, and set t=0 to the event of the explosion.

a.) Introduce a convenient coordinate system.
b.) Determine the time $t_0 < 0$, when the small greys have to shoot to hit the destroyer.
c.) Determine the bullets position **r**(t) as a function of time.

The tall blond aliens have kidnapped Attila P., the famous Hungarian rockstar and amateur UFO-scientist. Mr. Attila P. developed the theory of „relativity of everithing", and withouth carrying any calculations he soothes the aliens by stating that in their frame of reference, the destroyer will not explode.

d.) Determine the bullets position **r'**(t') as a function of time in the destroyers frame of reference.
e.) Determine the exact time and position, when and where the bullet was shot.
f.) Should the blond aliens worry?

Gy 2/3

Let Λ_1 be the Lorentz transformation that transforms to the frame of reference that moves in the direction $+x$ with velocity 0.6c. Let Λ_2 be the trasformation that transforms to the frame of reference that moves in the direction $+y$ with velocity 0.6c.

a.) Write down the matrices of Λ_1 and Λ_2 .
b.) Apply the two transformation consecutively. Determine the matrices of the transformations $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$ and $\Lambda' = \Lambda_2 \Lambda_1$. Show that they are different.
c.) Consider a particle that rests in the system to where the Λ transformation leads. What is the velocity vector of this particle move in the original inertial system?
d.) Repeate the calculation of c.) for a particle that rests in the system to where the Λ' transformation leads. Are the velocity vectors of c.) and d.) the same?

MECHANIKA 2 (2017/18 tavasz)	HF 2.

kisZH feladatok:

HF 2/1

A π-mezonok (π^+ vagy π^-) instabil részecskék, melyek (a velük együttmozgó rendszerben mérve)

$T_{1/2} = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ s felezési idővel elbomlanak. Létrehoztunk egy nyalábot π-mezonokból, amiben a részecskék 0,8c sebességgel haladnak.

a.) Mekkorának mérjük ekkor a π-mezonok felezési idejét?

b.) Tegyük fel, hogy a π-mezonokat egy d = 36 m hosszúságú alagúton vezetjük át. Hány százalékuk bomlik el az alagúton való áthaladás alatt?

c.) Mit kaptunk volna eredményül a b.) feladatra, ha nemrelativisztikus közelítéssel számolunk?

d.) Üljünk be a π-mezonokkal együttmozgó rendszerbe. Milyen hosszú itt az alagút?

e.) **(*)** Mennyi idő alatt jutnak át az alagúton a π-mezonok a velük együttmozgó rendszerben?

f.) **(*)** Hány százalékuk bomlik el az alagúton való áthaladás alatt a velük együttmozgó rendszerben?

(A *-gal jelölt részfeladatok gyakorlásra szolgálnak, már nem szerepelhetnek kisZH-n.)

HF 2/2

Tekintse az alábbi tér-idő transzformációt:

$$\Lambda^{\mu}_{.\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) Adott egy négyesvektor: $b^{\mu} = (5, 4, 0, 3)$. Transzformálja át azt a fenti transzformációval, azaz adha meg a b'^{μ} négyesvektort!

b.) Adja meg az eredeti b^{μ} négyesvektor Minkowski hossznégyzetét!

c.) Számítsa ki a b'^{μ} négyesvektor Minkowski hossznégyzetét, és mutassa meg, hogy ez a b.) feladatban kapottal egyenlő!

d.) Mutassa meg általánosan, hogy a fenti transzformáció Lorentz-transzformáció! Ehhez mutassa meg, hogy teljesül az alábbi egyenlet:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\rho}_{.\mu}\Lambda^{\varepsilon}_{.\nu} g_{\rho\varepsilon}$$

Gyakorló feladatok:

Gy 2/1

Egy ikertestvér-pár Arnold és Bruce vásároltak egy-egy interstelláris űrhajót.

- Arnold a Földről indulva hamar felgyorsít a fénysebesség 50%-ára, majd állandó sebességgel célba veszi a Földtől 4.5 fényévre található Alfa Centauri rendszert, ahol lefékezve leszáll egy ottani exobolygón.
- Bruce más megoldást választ, ő a fénysebesség 99%-ára gyorsít fel, de félúton megpihen egy Földhöz képest lényegében nyugvó űrbéli fogadóban és becsületsüllyesztőben. Végül ismét felgyorsít a fénysebesség 99%-ára és így Arnolddal egyszerre érkezik az Alfa Centauri renszerbe.

a.) Rajzoljuk fel Arnold és Bruce világvonalait a Minkowski síkra!

b.) A Földön mérve mennyi idő telik el, amíg Arnold és Bruce eléri úticélját?

c.) Mennyit öregszik az úton Arnold?

d.) A Földön mérve mennyi ideig tart Bruce-nak eljutni a féltávon lévő fogadóba, ill. onnan eljutni a célba?
e.) Mennyi időt tölt Bruce a fogadóban?
f.) Mennyit öregszik összesen Bruce?

Gy 2/2

A magas szőke földönkívüliek űrhajója meghibásodott, ezért egyenes vonalú egyenletes mozgást végez az űrben. Ősi ellenségeik, a kis szürkék az űrállomásukon észreveszik a nagy lehetőséget, és célba veszik a szőkék űrhajóját. Az űrállomás megfigyelői úgy látják, hogy az űrhajó *d* távolságban fog elhaladni mellettük és *c/2* sebességgel halad. Okos fizikusaik kiszámították, mikor és milyen irányban kell kilőniük szintén *c/2* sebességű lövedéküket, hogy az űrhajó hozzájuk lehető legközelebb robbanjon fel. Számításaikban a robbanás időpontját jelölik meg $t=0$-ként, a robbanás helyét tekintik az origónak nak.

a.) Vegyen fel kényelmes koordinátatengelyeket!
b.) Mikor kellett kilőniük a szürkéknek a lövedéket?
c.) Adjuk meg a lövedék **r**(t) hely-idő függvényét a választott koordinátarendszerben!

A magas szőkék űrhajóján utazik a híres lakodalmas rocksztár és amatőr UFO-kutató, P. Attila, aki kidolgozta a „mindenek relativitásának" elméletét. Bár számításokat nem végez, azzal nyugtatja magát, hogy minden relatív, ezért csak a szürkék vonatkoztatási rendszerében robban fel az űrhajó, az övékben nem.

d.) Adja meg a lövedék **r'**(t') hely-idő függvényét az űrhajóhoz rögzített koordinátarendszerben!
e.) Adja meg az űrhajó rendszerében a lövedék kilövésének pontos helyét és idejét!
f.) Kell-e aggódniuk a szőkéknek, vagy P. Attila nyugodtan rázendíthet a „gabonakör közepén állok" című méltán híres dalára?

Gy 2/3

Legyen Λ_1 az a (standard) Lorentz-transzformáció ami átvisz a $+x$ irányban $0,6c$-vel mozgó rendszerbe, Λ_2 pedig az a transzformáció ami átvisz a $+y$ irányban $0,6c$-vel mozgó rendszerbe.

a.) Adja meg a Λ_1 és Λ_2 transzformációk mátrixait!
b.) Hajtsa végre egymás után a két transzformációt. Adja meg a $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$ és $\Lambda' = \Lambda_2 \Lambda_1$ transzformációk mátrixát. Mutassa meg, hogy nem ugyanazt kapta.
c.) Tekintsen egy részecskét, ami áll annak a rendszernek az origójában, ahová a Λ transzformáció hatására jutottunk. Adja meg ennek a részecskének a mozgását az eredeti koordinátarendszerben. Mekkora és milyen irányú a részecske sebessége?
d.) Végezze el a c.) feladat számításait egy olyan részecskére, ami a Λ' rendszer origójában áll. Mekkora és milyen irányú sebességet kap az eredeti („álló") rendszerben?