KisZh-án szerepelhető feladatok

HF9/1

Egy egy szabadsági fokú mechanikai rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$$

Szeretnénk egy kanonikus transzformációt végrehajtani, aminek alkotófüggvénye „2"-es típusú:

$$W_2(q,P) = \frac{P}{q}$$

a.) Az alkotófüggvény megfelelő deriváltjai segítségével adja meg a p(q,P) és Q(q,P) összefüggéseket!
b.) Az a.) feladatban kapott összefüggések segítségével adja meg a „régi" kanonikus koordinátákat az „újak" függvényében, azaz adja meg a q(Q,P) és p(Q,P) összefüggéseket!
c.) Adja meg az új K(Q,P) Hamilton függvényt!
d.) Írja fel a K(Q,P) Hamilton-függvény segítségével a kanonikus mozgásegyenleteket az új változókra!
e.) Adja meg a mozgásegyenletek Q(t) és P(t) megoldását!
f.) Transzformáljon vissza a régi koordinátákba, azaz a Q(t) és P(t) ismeretében adja meg a q(t) és p(t) függvényeket!

HF9/2

Adott az alábbi transzformáció, ami a q-p fázissík koordinátatengelyeit forgatja el:

$$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$$

$$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$$

a.) A [Q,P] Poisson zárójel kiszámításával mutassa meg, hogy a transzformáció kanonikus!

Szeretnénk egy W_2(q,P) alkotófüggvényt találni, ami a fenti transzformációt generálja. Ehhez a következőket kell tennie:

b.) Alakítsa át a fenti egyenleteket és fejezze ki a p(q,P) és Q(q,P) függvényeket!
c.) A b.) feladat eredményeiből olvassa le a $\frac{\partial W_2(q,P)}{\partial q}$ és $\frac{\partial W_2(q,P)}{\partial P}$ deriváltakat!
d.) Oldja meg a differenciálegyenletet, azaz adjon meg egy megfelelő $W_2(q,P)$ függvényt!

MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	B) HF 9

Gyakorlófeladatok

Gy9/1

Egy egydimenziós harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye megfelelő időegységet választva az alábbi alakba írható:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2}+\frac{x^2}{2}$$

a.) Tekintse az alábbi transzformációt:

$$Q=\frac{x+ip}{\sqrt{2}}$$

$$P=\frac{ix+p}{\sqrt{2}}$$

Poisson-zárójelek segítségével mutassa meg, hogy a transzformáció kanonikus!

b.) Konstruáljon egy „2"-es típusú alkotófüggvényt, ami az a.) feladatban szereplő kanonikus transzformációt generálja.

c.) Adja meg az új K(Q,P) Hamilton függvényt! Írja fel és oldja meg a kanonikus egyenleteket!

d.) Láthatja, hogy az új Hamilton-függvény komplex, és a kanonikus egyenletek megoldásai is komplex értékű függvények. Az eredeti p,x változók viszont valósak, ez alapján mutassa meg, hogy P = iQ*, és azt, hogy a K(Q,P)-ből számolt mozgásegyenletek nem „rontják el" ezt az összefüggést (azaz $\frac{d}{dt}P=i\frac{d}{dt}Q^*$)

e.) Legendre-transzformáció segítségével készítsen „1"-es típusú $W_1(x,Q)$ alkotófüggvényt a b.)-ben kapott $W_2(x,P)$-ből. Mutassa meg, hogy ez is ugyanazt a transzformációt generálja!

Gy9/2

Tekintse az alábbi transzformációt:

$$Q=q^{\alpha}\cos\beta p,\quad P=q^{\alpha}\sin\beta p$$

a.) Számítsa ki a [Q,P] Poisson-zárójelet!

b.) Mekkorának válasszuk α-t és β-t ha azt szeretnénk, hogy a transzformáció kanonikus legyen?

c.) Vegye a két egyenlet hányadosát, és ezzel fejezze ki a Q(p,P) összefüggést!

d.) „4"-es típusú $W_4(p,P)$ alkotófüggvényt keresünk a transzformációnak. A c.)-ben kapott kifejezés (megfelelő előjellel vett) integráljából fejezze ki W_4-et!

Gy9/3

Egy kétdimenziós, elektromosan töltött izotrop harmonikus oszcillátort a rezgési síkjára merőleges irányú homogén B indukciójú mágneses térbe helyeztünk. A rendszer Hamilton-függvénye (az ún. szimmetrikus mértékben felírva) az alábbi:

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x+\frac{eB}{2}y\right)^2+\frac{1}{2m}\left(p_y-\frac{eB}{2}x\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)$$

A feladatban egy elsőre furcsa, de elegáns megoldást adunk a problémára. A megoldás azon az észrevételen alapul, hogy egy forgó koordinátarendszerben a Coriolis-erő éppen olyan alakú, mint egy homogén mágneses tér hatása, ezért azt várjuk, hogy esetünkben áttérve megfelelő szögsebességgel forgó koordinátarendszerbe a mágneses tér hatását kitranszformálhatjuk, és így egy egyszerű izotrop harmonikus oszcillátort nyerünk.

a.) Gyakorlaton meghatároztuk az áttérés alkotófüggvényét, ami „2”-es típusú, és az alábbi alakú:

$$W_2(x, y, P_X, P_Y, t) = x(P_X \cos\Omega t - P_Y \sin\Omega t) + y(P_X \sin\Omega t + P_Y \cos\Omega t)$$

Az alkotófüggvény megfelelő deriváltjainak segítségével fejezze ki a p_x, p_y, X és Y változókat az x,y,P_X,P_Y és t függvényében!

b.) Az a.)-ban a kapott egyenletek átalakításával fejezze ki az új {X,Y,P_X,P_Y} koordinátákat a régiek {x,y,p_x,p_y} segítségével.

c.) Adja meg a b.)-ben szereplő összefüggések inverzét is, azaz fejezze ki a régi koordinátákat az újak segítségével is!

d.) Adja meg a K(X,Y,P_X,P_Y) új Hamilton-függvényt! Ha jól számolt ez időfüggetlen lesz.

e.) Mutassa meg, hogy az új K Hamilton-függvény az eredetinek megfelelő alakra hozható, azaz

$$K = \frac{1}{2m}\left(P_X + \frac{eB'}{2}Y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(P_Y - \frac{eB'}{2}X\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega'^2\left(X^2 + Y^2\right),$$

ahol B’ és ω’ az új „effektív” mágneses tér és körfrekvencia. Fejezze ki ezeket a forgó koordinátarendszer Ω szögsebességének, valamint a B, e, m és ω függvényeként.

f.) Mekkorának válasszuk az Ω szögsebességet, hogy a B’ effektív mágneses térerősség zérussá váljon? Hogyan néz ki ekkor a K Hamilton-függvény, azaz mekkora az ω’ effektív körfrekvencia?

g.) Oldjuk meg a mozgásegyenleteket abban a forgó rendszerben, ahol a B’ effektív térerősség zérus! Tudjuk, hogy itt a részecske ellipszis pályákon keringhet. Mennyi a keringési idő?

h.) Láthatjuk, ha visszatérünk az eredeti *x*,*y* koordinátarendszerbe, az ellipszis pálya nagytengelye Ω szögsebességgel forog. Ábrázoljuk a részecske pályáját!
