MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	A) HF 11

HF11/2

Egy m tömegű labda az x tengely mentén mozoghat egy L hosszúságú dobozban. A doboz végpontjain a labda pillanatszerűen és rugalmasan visszapattan. A labda mozgását a két fal között az alábbi Hamilton-függvény írja le:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}$$

a.) Rajzolja fel az E energiájú periodikus mozgásnak megfelelő fázistér-beli trajektóriát!
b.) Határozza meg a trajektória által körbezárt fázis-területet, ezt jelölje 2π I(E)-vel!
c.) Határozza meg az E(I) függvényt!
d.) Az I(E) függvény deriváltjából határozza meg az E energiájú mozgás periódusidejét!

--

HF11/2

Egy m tömegű labda az x tengely mentén mozoghat egy dobozban, aminek L hosszúsága az idő függvényében lassan változik. A doboz végpontjain a labda pillanatszerűen és rugalmasan visszapattan. A labda mozgását a két fal között az alábbi Hamilton-függvény írja le:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}$$

a.) Feltéve, hogy a doboz hossza éppen L, rajzolja fel az E energiájú periodikus mozgásnak megfelelő fázistér-beli trajektóriát!
b.) Határozza meg a trajektória által körbezárt fázis-területet, ezt jelölje 2π I(E,L)-lel!
c.) Az adiabatikus invariáns tétel értelmében, ha L lassan változik, akkor a mozgás során az I(E,L(t)) mennyiség állandó marad. Tegyük fel, hogy a doboz hosszát a kezdeti érték felére csökkentettük. Hányszorosára növekedett a labda energiája?

--

MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	B) HF 11

Gy11/2

Egy tömegpont az x tengely mentén mozoghat, Hamilton függvénye:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}-\frac{\alpha}{|x|}.$$

(Megj: ez lényegében a Kepler problémának az a határesete, amikor a keringő bolygó perdülete zérus.)

a.) Rajzolja fel a p-x fázissíkra az E<0 negatív energiákhoz tartozó periodikus mozgásoknak megfelelő szintvonalakat.

b.) Adja meg E függvényében az x_{max} maximális kitérést!

c.) Írja fel az I hatásváltozót kifejező integrált!

d.) Ismeretes, hogy $\xi=\int_0^1 du\sqrt{1+\frac{1}{u}}$ =2.296... . Ennek segítségével fejezze ki az I(E) függvényt!

e.) Adja meg a mozgás periódusidejét az energia függvényében!

Gy11/2

Egy kétdimenziós izotrop elektromosan töltött harmonikus oszcillátort a síkjára merőleges B mágneses térbe helyeztünk. A rendszer Hamilton-függvénye síkbeli polár koordinátákban:

$$H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{\left(p_\varphi-\frac{eB}{2}r^2\right)^2}{2mr^2}+\frac{1}{2}m\omega_0^2r^2$$

a.) Írja fel a rendszer rövidített Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) A polárszögtől való függés szeparálható: $S_0(r,\varphi,E)=S_r(r,L,E)+L\varphi$. Mutassa meg, hogy a bevezetett „L" állandó egyenlő a φ-hez tartozó $I_\varphi=\frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi$ hatásváltozóval!

c.) Írja fel az $I_r=\frac{1}{2\pi}\oint p_r dr$ hatásváltozót meghatározó integrált!

A gyakorlaton is látott komplex kontúrintegrálási módszerrel megmutatható, hogy

$$\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{a-br^2-\frac{c}{r^2}}=-\frac{\pi}{2}\sqrt{c}+\frac{\pi}{4}\frac{a}{\sqrt{b}},$$

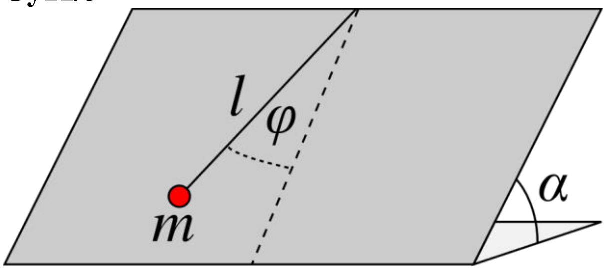
ahol az integrálási határok a függvény zérushelyei.

d.) Az integrálási segédlet használatával fejezze ki az E energiát az I_r és I_φ hatásváltozók függvényében. Hasznos lehet bevezetni az $\Omega=\frac{eB}{2m}$ jelölést.

e.) Határozza meg az I_r és I_φ hatásváltozókhoz tartozó körfrekvenciákat!

f.) EXTRA! Adja meg azon mágneses tér nagyságokat, ahol zárt pálya alakulhat ki!

Gy11/3



Egy állítható α hajlásszögű lejtőre egy m tömegű l hosszúságú matematikai ingát fektettünk. Az inga kitérését a φ szöggel mérjük. Az ingatest súrlódás nélkül mozoghat a lejtőn.

a.) Konstruálja meg a rendszer Hamilton-függvényét!

b.) Adott α esetén határozza meg az $I(E,\alpha)$ hatásváltozót az energia függvényében!

c.) Az inga eredetileg $A_{\varphi,0}$ szögamplitúdójú rezgést végzett, a lejtő hajlásszöge ekkor α_0 volt. Ezután a lejtő hajlásszögét lassan, nem rángatva egy másik α_1 szögre változtattuk. Az adiabatikus invariancia tételét felhasználva adja meg a végállapotban az inga $A_{\varphi,1}$ szögamplitudóját!

MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	C) HF 11

C11.) Feladat

Tekintse a centrális $V(r) = -\alpha/r^2$ potenciálban mozgó részecske problémáját! A Kepler problémához hasonló módon transzformálja át a problémát hatás-szög változókra, és adja meg az I_r-hez és I_φ-hez tartozó körfrekvenciákat az energia függvényében!