KisZh-án szerepelhető feladatok

HF10/1

Egy Θ tehetetlenségi nyomatékú tárcsa egy tengelyhez van rögzítve, ami körül könnyen elfordulhat. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2\Theta}$$

a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) A szoksásos $S(\varphi, t) = S_0(\varphi, E) - Et$ szeparálást alkalmazva írja fel az S_0-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Oldja meg az egyenletet, adja meg az $S_0(\varphi, E)$ függvényt!

d.) A $t = 0$ időpontban a tárcsa a $\varphi = 0$, $p_\varphi = L$ kezdeti feltételekkel indult. Ez alapján adja meg az E és a $\frac{\partial S}{\partial E} = \beta$ mozgásállandók értékét!

e.) A d.)-ben kapott egyenletekből fejezze ki a tárcsa mozgását leíró $\varphi(t)$ függvényt!

HF10/2

Egy töltött részecske az x-y síkban mozoghat, rá z irányú mágneses térerősség hat. A rendszer (egy lehetséges) Hamilton-függvénye:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m}(p_y - eBx)^2$$

a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) A szokásos $S(x, y, t) = S_0(x, y, E) - Et$ szeparálást alkalmazva írja fel az S_0-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Szeparálja tovább a hatásfüggvényt, keresse $S_0(x, y, E) = S_x(x, E, \alpha) + S_y(y, E, \alpha)$ alakban! Helyettesítse ezt az alakot a b.)-ben kapott rövidített Hamilton-Jacobi egyenletbe!

d.) Láthatja, hogy y-tól való függés csak a $\frac{\partial S_y}{\partial y}$ tagon keresztül történik, az egyenlet többi tagja független y-tól. Ezért $\frac{\partial S_y}{\partial y} = \alpha$ konstansnak választható. Használja ezt a választást! Milyen egyenletet kap S_x-re?

e.) Oldja meg az egyenleteket, adja meg az $S_x(x,E,\alpha)$ és $S_y(y,E,\alpha)$ függvényeket, majd ezekből a teljes $S(x,y,E,\alpha,t)$ hatásfüggvényt!

MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	B) HF 10

Gyakorlófeladatok

Gy10/1

Egy tömegpont az x tengely mentén mozoghat, rá időben lineárisan növekvő külső erő hat. A rendszer Hamilton-függvénye:

$$H(x,p,t)=\frac{p^2}{2m}-Axt$$

a.) Írja fel a rendszer Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Mivel a Hamilton-függvény explicit módon függ az időtől, a szokásos szeparálást közvetlenül nem tehetjük meg. Próbálkozzon az alábbi alakkal:
$S(x,t)=F(t)x+G(t)$!
Írja fel a Hamilton-Jacobi egyenletet ezt az alakot feltételezve!

c.) Gyűjtse össze a tagokat úgy, hogy az egyenlet az $x(\text{valami}_1)+\text{valami}_2=0$ alakban álljon előttünk, ahol a két „valami” már nem függ az x-től.

d.) Ahhoz, hogy az egyenletet megoldjuk, a két „valami”-nek külön-külön zérusnak kell lennie. (Miért is?) Ebből a két feltételből adja meg az $F(t)$ és $G(t)$ függvényeket! Ha jól számolt, megjelenik egy szabad integrálási konstans, ezt jelölje α!

e.) Írja fel az $S(x,\alpha,t)$ függvényt! A $t=0$ időpontban a tömegpont az $x_0=0$ és $p_0=0$ helyzetből indult. Ennek segítségével rögzítse az α konstans értékét!

f.) A Hamilton-Jacobi egyenlet szerint a $\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ mozgásállandó. Fejezze ki ennek értékét a kezdeti feltételek segítségével!

g.) A $\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ összefüggésből fejezze ki a mozgásegyenlet $x(t)$ megoldását!

Gy10/2

Gyakorlaton szerepelt a függőleges hajítás problémája, aminek Hamilton-függvénye:

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+mgx$$

A szokásos Hamilton-Jacobi egyenletben „2”-es típusú $S(x,\alpha)$ alkotófüggvényt keresünk, ami zérussá teszi a Hamilton-függvényt, majd kihasználjuk, hogy az α új impulzus mozgásállandó. Ez azonban nem az egyetlen lehetséges választás.

Keressünk most „3”-as típusú $S(p,\alpha)$ alkotófüggvényt! Ekkor $x=-\frac{\partial S}{\partial p}$.

a.) Írja fel a Hamilton-Jacobi egyenletet: $H(p,-\frac{\partial S}{\partial p})+\frac{\partial S}{\partial t}=0$

b.) Szeparálja az időt az $S(p,t)=S_0(p,E)-Et$ alakban! Írja fel az S_0-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Oldja meg az egyenletet, adja meg $S_0(p,E)$ függvényt!

d.) A $t=0$ időpontban a test az $x=0$ pontból indult p_0 impulzussal. Fejezze ki ennek segítségével az E konstans értékét!

e.) A $\beta=\frac{\partial S}{\partial E}$ mennyiség a Hamilton-Jacobi egyenlet értelmében időállandó. Fejezze ki ennek értékét a kezdeti feltételek segítségével!

f.) Adja meg a mozgásegyenlet $x(t)$ megoldását!

Gy10/3

Tekintse a centrális erőtérben mozgó részecske problémáját. A rendszer Hamilton-függvénye polár koordinátákban:

$$H(r,\varphi,p_r,p_\varphi)=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}+V(r)$$

a.) Írja fel a rendszer teljes Hamilton-Jacobi egyenletét!

b.) Szeparálja az időt, azaz keresse a megoldást $S(r,\varphi,t)=S_0(r,\varphi,E)-Et$ alakban!
Írja fel az S_0-ra vonatkozó rövidített Hamilton-Jacobi egyenletet!

c.) Szeparálja a szöget, azaz keresse az S_0 függvényt $S_0(r,\varphi,E)=S_r(r,L,E)+L\varphi$ alakban, ahol L egy újabb konstans. Írja fel az S_r-re vonatkozó ún. radiális Hamilton-Jacobi egyenletet!

d.) Adja meg az S_r-t kifejező integrált! ($S_r=\int dr...$)

A megjelenő integrált általános esetben nem tudjuk zárt alakban kifejezni. Sok kérdésre azonban úgy is válaszolhatunk, hogy nem végezzük el az integrált.

e.) A $t = 0$ időpontban a részecske az origótól $r = R$ távolságra volt a $\varphi=0$ helyen, és épp a sugárra merőlegesen haladt, azaz $p_r = 0$ és $p_\varphi = L_0$ voltak a kezdeti impulzusok. Ezen kezdeti feltételek ismeretében fixáljuk az L és E konstansokat!

f.) Az E-hez és L-hez kanonikusan konjugált koordináták legyenek β_E és β_L. Bár az S hatásfüggvényt nem fejezte ki zárt alakban, de a két β konstanst fel tudja írni úgy, hogy bennük legfeljebb egy r szerinti integrál van:

$$\beta_E=\frac{\partial S}{\partial E}=-t+\int dr...$$

$$\beta_L=\frac{\partial S}{\partial L}=\varphi+\int dr...$$

Fejezze ki a két „ ...”-ot!

g.) EXTRA! Legyen $V(r)=-\frac{k}{r}$! Ekkor a β_L-t meghatározó integrált mégis el tudja végezni. Végezze el! Mit kapott?
