
1.) Feladat

A (nonrelativistic) particle of mass m and charge e moves in a homogeneous magnetic field B that points in the z direction. The gravitational and electric fields are zero. The magnetic vectorpotential is chosen to be **A** = (0, Bx, 0). (This is called the Landau-gauge)

a.) Write down the Lagrangian of the system.

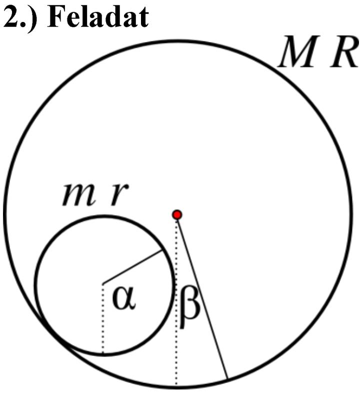
b.) Show that the Lagrangian is invariant under the transformation $x' = x$, $y' = y$, $z' = z + s$. Using Noether's theorem express the corrseponding conserved quantity.

c.) Show that the transformation $x' = x$, $y' = y + s$, $z' = z$ is also a symmetry. What is the corresponding conserved quantity?

d.) Consider the transformation $x' = x + s$, $y' = y$, $z' = z$. This Lagrangian is not invariant under this transformation. Show that the change in the Lagrangian is a total time derivative in this case. We know that the equations of motion are invariant, if we add such a term to the Lagrangian: the transformation is a symmetry of the problem.

e.) Construct the corresponding conserved quantity of problem d.) To do so, we need to slightly modify the derivation of the last Lecture.

2.) Feladat



An empty cilinder of mass M and radius R can easily rotate around its symmetry axis. Within the cilinder there is a smaller ring of mass m and radius r. The configuration of the system is described by the angles α and β. The gravitational field is described by the vertical vector g.

a.) Construct the Lagrangian of the system. Show that it reads as

$$L = mr^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}(m+M)R^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - mrR\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} +$$
$$+ mg(R-r)\cos\left(\frac{r\alpha - R\beta}{R-r}\right) + const.$$

b.) Show that the transformation $\alpha' = \alpha + \phi$, $\beta' = \beta + \phi\, r/R$ keeps the Lagrangian invariant. What kind of „motion" is described by this transformation?

c.) Using Noether's theorem, determine the corresponding conserved quantity.

d.) Determine the equations of motion for the system. Show directly, that the conserved quantity derived in c.) is indeed a constant of motion.

3.) Feladat

Consider a particle in a central potential. The Hamiltonian of the system is:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

a.) Write down the components of the angular momentum (L_x, L_y and L_z) using the canonical momentum **p** and the position **r.**

b.) Determine the Poisson brackets $[L_x, x]$, $[L_x, y]$, $[L_x, p_x]$ and $[L_x, p_y]$.

c.) Generalize the results of b.), so determine the Poisson brackets $[L_i, r_j]$ and $[L_i, p_j]$ for any i, j indices.

d.) Determine the Poisson bracktes $[L_i, L_j]$.

e.) Determine the Poisson brackets $[L_i, H]$ for any value of i. What does this tell about the angular momentum?

4.) Feladat

Consider the Kepler problem that is described by the Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

a.) Consider the following vector (it is called the Runge-Lenz vector)

$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\,\alpha\,\mathbf{e}_r$.

Express the components of that vector so, that only the components of the canonical momentum and position vectors are used.

b.) Determine the Poisson bracket $[A_i, H]$. What does it tell about the vector A?

c.) Using the conservation of A, derive the particle's orbital.

To do so consider an orbital that is in the x-y plane and the vector A points in the x direction. (We can always choose a coordinate system where this is true.) Express the scalar product $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ using polar coordinates (r, ϕ) and then using trivial algebra express the orbital.

d.) What does the direction of A mean? What is its length?

MECHANIKA 2 (2017/18 tavasz)	GYAK 8.

1.) Feladat

Homogén, z irányú B mágneses indukciójú térben m tömegű e töltésű részecske mozog. A gravitációs tér és a $\Phi(\mathbf{r})$ elektromos potenciál nulla. A mágneses vektorpotenciált $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$-nak választottuk (Landau-mérték).

f.) Írjuk fel a részecske Lagrange-függvényét!

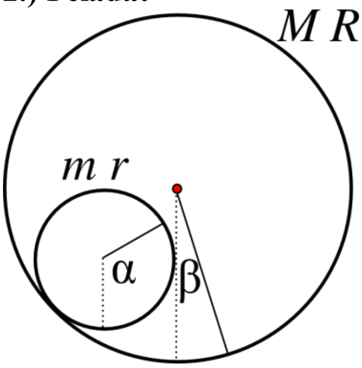
g.) Mutassuk meg, hogy az $x' = x$, $y' = y$, $z' = z + s$ leképzés a Lagrange függvény szimmetriája. A Noether tétel alapján adjuk meg a megfelelő megmaradó mennyiséget!

h.) Mutassuk meg, hogy az $x' = x$, $y' = y + s$, $z' = z$ is szimmetria! Mi a megfelelő megmaradó mennyiség?

i.) Tekintsük a $x' = x + s$, $y' = y$, $z' = z$ transzformációt. Ez láthatóan nem hagyja invariánsan a Lagrange függvényt. Mutassuk meg, hogy a Lagrange-függvény megváltozása ebben az esetben egy teljes idõderivált, tehát általánosabban véve ez is szimmetria.

j.) Konstruáljuk meg a d.)-feladatban szereplő transzformációhoz tartozó megmaradó mennyiséget! (Ehhez ki kell egészítenünk a Noether-tétel előadáson szereplő levezetését!)

2.) Feladat



Egy M tömegű R sugarú belül üreges gyűrű könnyen elfordulhat a tengelye körül. Benne belül egy m tömegű r sugarú gyűrű jól tapadva gördülhet. A mechanikai rendszer helyzetét az α és β szögelfordulásokkal jellemezzük, a rendszerre hat a függőleges g gravitációs tér is.

e.) Konstruáljuk meg a rendszer Lagrange-függvényét! Mutassuk meg, hogy

$$L = mr^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}(m+M)R^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - mrR\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} +$$
$$+ mg(R-r)\cos\left(\frac{r\alpha - R\beta}{R-r}\right) + const.$$

f.) Mutassuk meg, hogy az $\alpha' = \alpha + \phi$, $\beta' = \beta + \phi\, r/R$ transzformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt! Milyen elmozdulást ír le ez a transzformáció?

g.) Adjuk meg a b.) feladat szimmetriájából következő Noether-féle megmaradó mennyiséget!

h.) Adjuk meg a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenleteit! Mutassuk meg közvetlen számolással, hogy a c.)-ben kapott mennyiség megmarad!

3.) Feladat

Egy tömegpont centrális erőtérben mozoghat. Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

f.) Írja fel a tömegpont impulzusmomentumának L_x, L_y és L_z komponensét a $\mathbf{p}$ kanonikus impulzusvektor és $\mathbf{r}$ helyvektor komponenseinek segítségével!

g.) Számítsa ki az $[L_x, x]$ és $[L_x, y]$ Poisson zárójeleket, valamint az $[L_x, p_x]$ és $[L_x, p_y]$ Poisson-zárójeleket!

h.) A b.) feladat eredményeit általánosítva számítsa ki az $[L_i, r_j]$ és $[L_i, p_j]$ Poisson-zárójeleket tetszőleges i-j indexpárra!

i.) Számítsa ki az $[L_i, L_j]$ Poisson-zárójelet tetszőleges i-j indexpárra!

j.) Számítsa ki az $[L_i, H]$ Poisson-zárójelet tetszőleges i-re! Mit mond ez számunkra az impulzusmomentumról?

4.) Feladat

Tekintsük a Kepler-problémát, aminek Lagrange-függvénye

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

e.) Tekintse az alábbi vektort (a neve Runge-Lenz vektor):
$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - m\,\alpha\,\mathbf{e}_r$.
Fejezze ki ezen vektor komponenseit úgy, hogy benne csak a kanonikus hely és impulzus komponensek szerepeljenek!

f.) Számítsa ki az $[A_i, H]$ Poisson-zárójelet! Mit mondhatunk ez alapján az **A** vektorról?

g.) Az **A** vektor megmaradását kihasználva fejezzük ki (a mechanika 1 tárgyon látott effektív potenciálos módszernél sokkal egyszerűbben) a keringő bolygó pályáját!
Ehhez tekintsünk egy olyan ahol a pálya síkja az x-y sík, és az **A** vektor mutasson az x irányba. Fejezzük ki az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ skaláris szorzatot az (r,ϕ) polárkoordináták segítségével, majd rendezzük megfelelően a kapott kifejezést és olvassuk le a pályát!

h.) Milyen irányba mutat az **A** vektor? Mit fejez ki a hossza?
