
Problem 1.)

A particle moves freely along the x-axis. Its Hamiltonian is

$$H_0(p,x)=\frac{p^2}{2m}$$

a.) Write down the Hamilton-Jacobi equation for the system, and solve it. In the following it will be convenient if, instead of the energy, we introduce the constant $\frac{\partial S}{\partial x}=\alpha$ for the separation.

b.) Determine the canonical transformation generated by S.

c.) Now we introduce a potential that perturbs the system. Let it be the usual harmonic potential, $H_1(p,x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$. The full Hamiltonian of the system is then.

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Transform this Hamiltonian using the transformation of b.) You see, that the H_0 part vanishes in this case, but H_1 is still there.

d.) Write down the canonical equations for the new set of variables (α and β).

e.) Although we could solve these equations in this case (because we can solve the full problem), but instead of doing that, in the spirit of perturbation theory, determine the functions $\alpha(t)$ and $\beta(t)$ in the form of Taylor series.

Problem 2.)

The Hamiltonian of an anharmonic oscillator is:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(x^2+b\frac{x^4}{2}\right)$$

Our goal is to determine the period of the motion as a function of energy.

Let's start from the unperturbed problem

$$H_0=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

a.) Transform to the action-angle variables of H_0. Denote them by I_0 and φ_0!

b.) Express the full Hamiltonian H as a function of I_0 and φ_0.

From this point we follow the usual method of action-angle variables, using the Hamiltonian $H(I_0,\varphi_0)$, i.e.

c.) Using the full Hamiltonian, express the equation of constant energy (H=E) contours $I_0(E,\varphi_0)$. Determine this function as a series in E. It is enough to keep the first (or maybe second) nontrivial term.

d.) Write down the „full" action variable $I(E)=\frac{1}{2\pi}\oint d\varphi_0 I_0(E,\varphi_0)$ as a series in E.

e.) Determine T(E) (as a series in E).

f.) When is our calculation convergent?

1.) Feladat

Egy részecske az x-tengely mentén szabadon mozoghat, Hamilton-függvénye:

$$H_0(p,x)=\frac{p^2}{2m}$$

a.) Írjuk fel a rendszer Hamilton-Jacobi-egyenletét, és oldja meg. A továbbiak miatt kényelmes, ha az energia helyett a $\frac{\partial S}{\partial x}=\alpha$ szeparálási konstanst vezetjük be.

b.) Adjuk meg az S által generált kanonikus transzformációt!

c.) Most kapcsoljunk be egy perturbáló potenciált, aminek alakja $H_1(p,x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$, azaz

$$H(p,x)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Transzformálja át a Hamilton-függvényt a b.)-ben kapott transzformációval! Láthatja, hogy ezzel a H_0 tagot eltüntettük, H_1 viszont megmaradt.

d.) Írja fel az eltranszformált (α, β) változókra a kanonikus mozgásegyenleteket!

e.) Bár ezeket az egyenleteket most meg tudnánk oldani, azonban most más utat járunk. Állítsuk elő az α(t) és β(t) függvényeket Taylor-sor alakban, iteratíven!

2.) Feladat

Egy anharmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakban áll előttünk:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(x^2+b\frac{x^4}{2}\right)$$

A célunk meghatározni az oszcillátor periódusidejét az energia függvényében.
Induljunk ki a perturbálatlan harmonikus oszcillátorból:

$$H_0=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$$

a.) Transzformáljon át a H_0-nak megfelelő hatás-szög változókba, ezeket jelölje I_0 és φ_0!

b.) Fejezze ki a teljes H függvényt I_0 és φ_0 segítségével!

Ettől a ponttól kezdve a $H(I_0,\varphi_0)$ függvényből kiindulva a szokásos módon állunk neki a teljes H-nak megfelelő hatás-szög változókkal való számolásnak, azaz:

c.) Fejezzük ki a teljes (H=E) energia segítségével a szintvonalak $I_0(E,\varphi_0)$ egyenletét. Adja meg a függvényt E szerint kifejtett hatványsor alakban! Elegendő az első (esetleg második) nemtriviális tagig számolnia!

d.) Írjuk fel a teljes H-nak megfelelő $I(E)=\frac{1}{2\pi}\oint d\varphi_0 I_0(E,\varphi_0)$ hatásváltozót E szerinti hatványsor alakban!

e.) Határozzuk meg a mozgás T(E) periódusidejét E szerinti hatványsor alakban!

f.) Mikor konvergens a d.)-ben szereplő hatványsor? Értelmezzük az eredményt!