Problem 1.)
Let denote the pair of canonical coordinates {q,p} together using the vector $\underline{\eta}$. Consider the following transformation

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\left(\dfrac{\sin p}{q}\right) \\ q\cot p \end{pmatrix}$$

a.) Express the Jacobi matrix $M_{ij} = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$.

b.) Show that the transformation is canonical, i.e. it keeps the simplectic structure J_{ij} invariant
$M_{ik}J_{kl}M_{jl} = J_{ij}$,
where
$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problem 2.)
Consider the following generator functions
$W_1(q,Q) = qQ$,
$W_2(q,P) = qP$,
$W_3(p,Q) = pQ$, és
$W_4(p,P) = pP$.

a.) Determine the generated canonical transformations for each generator function.
b.) By checking the poisson brackets of Q and P show that the transformations are canonical.

Problem 3.)
Consider a linear harmonic oscillator whose Hamiltonian reads as
$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2).$$
Consider the following generator functions and try to derive transformation rules.

a.) $W_1(q,Q) = q + Q$
b.) $W_2(q,P) = q + P$
c.) $W_2(q,P) = (q+P)^2$
d.) Which generator function describes indeed a transformation? Perform the transformation and determine the „new" Hamiltonian K(Q,P).
e.) Determine the canonical equations using the new form of the Hamiltonian. Solve the equations!

Problem 4.)
In the lecture you studied the following (2nd type) generator function
$W_2(\underline{q},\underline{P}) = f_l(\underline{q})P_l \quad (l \in \{1,\ldots, f\})$,

that leads to the „point-transformation" $Q_l = f_l(\underline{q})$, $\quad p_m = \dfrac{\partial f_l(\underline{q})}{\partial q_m} P_l$.

a.) Consider the transformation from Descartes- to polar coordinates $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$. Determine the generator function for this transformation.
b.) Express the „old" momenta p_x and p_y in terms of P_r and P_φ .
c.) Invert the expressions, and express the „new" momenta P_r and P_φ in terms of the „old" momenta.

Problem 5.)
Consider a linear harmonic oscillator whose Hamiltonian reads as

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2).$$

a.) Write down the canonical equations, solve them, and draw the trajectories in the phase-space *p-q*.
b.) We see that because of the conservation of energy the trajectories are ellipses in the pase space. It seems to be a good idea to make these ellipses to coordinate lines. This can be done using the parametrization
$$p = m\omega A\cos Q, \quad q = A\sin Q.$$
Search for a 1st type generator function that leads to this transformation.
c.) Determine the new momenta and coordinate in terms of the old variables.
d.) Express the new form of the Hamiltonian, determine the canonical equations and solve them.

Problem 6.)
The Hamiltonian of a system with one degree of freedom reads as

$$H = \frac{p^2}{2m}e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2}m\omega_0^{\,2}x^2e^{2\alpha t}.$$

a.) Determine the canonical equations. What kind of system is this?
b.) Show that the canonical momentum „p" is not equal to the physical momentum „m v". What is the connection between them?

Consider the following generator function

$$W_1(x,Q) = -xQe^{\alpha t} - \frac{\alpha m}{2}x^2e^{2\alpha t}$$

c.) Determine the generated canonical transformation.
d.) Express the new form K(Q,P) of the Hamiltonian. Be careful! The generator function depends explicitly on time.
e.) Determine the equations of motion in the new variables and solve them.
f.) Transform back the solutions to the original p,x coordinates.

1.) Feladat

A {q,p} kanonikus koordináta és impulzus kettősét az előadáshoz hasonlóan jelölje az $\underline{\eta}$ vektor. Tekintse az alábbi transzformációt:

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{\sin p}{q}\right) \\ q\cot p \end{pmatrix}$$

c.) Fejezze ki az $M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$ Jacobi mátrixot!

d.) Mutassa meg, hogy a fenti transzformáció invariánsan hagyja a J_{ij} mátrixszal leírt szimplektikus struktúrát:

$M_{ik} J_{kl} M_{jl} = J_{ij}$,

ahol

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.) Feladat

Tekintsük az alábbi egyszerű kanonikus transzformációkat generáló függvényeket:

$W_1(q,Q) = qQ$,
$W_2(q,P) = qP$,
$W_3(p,Q) = pQ$ és
$W_4(p,P) = pP$

c.) Vezessük le a fenti függvények által generált kanonikus transzformációkat!

d.) A kanonikus Poisson-zárójel összefüggések ellenőrzésével győződjünk meg arról, hogy valóban kanonikus transzformációkat kaptunk!

3.) Feladat

Adott egy lineáris harmonikus oszcillátor, melynek Hamilton-függvénye:

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)..$$

Tekintse az alábbi generátorfüggvényeket, és kíséreljük meg levezetni a transzformációs összefüggéseket belőlük.

f.) $W_1(q,Q) = q + Q$

g.) $W_2(q,P) = q + P$

h.) $W_2(q,P) = (q+P)^2$

i.) Melyik valósít meg ténylegesen kanonikus transzformációt? Abban az esetben hajtsuk végre a transzformációt, és határozzuk meg az új K(Q,P) Hamilton-függvényt!

j.) Írjuk fel az új kanonikus egyenleteket, és oldjuk is meg őket!

4.) Feladat

Előadáson szerepelt, hogy amennyiben egy „2"-es típusú alkotófüggvény az alábbi alakban áll előttünk:

$W_2(\underline{q},\underline{P}) = f_l(\underline{q})P_l \quad (l \in \{1,..., f\})$,

úgy ez a transzformáció a $Q_l = f_l(\underline{q})$, $\quad p_m = \dfrac{\partial f_l(\underline{q})}{\partial q_m} P_l$ ún. pont-transzformációt hajtja végre.

d.) Tekintsük az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad \varphi = \arctan \dfrac{y}{x}$, Déscartes $\rightarrow$ polár koordinátarendszerek közötti transzformációt. Adjuk meg a transzformáció alkotófüggvényét!

e.) Fejezze ki a p_x és p_y „régi" impulzusokat a P_r és P_φ függvényében!

f.) Invertálja a b.)-ben kapott összefüggéseket, azaz adja meg a P_r és P_φ új impulzusokat a régi koordináták és impulzusok segítségével!

5.) Feladat

Egy harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2).$$

e.) Írjuk fel a kanonikus mozgásegyenleteket, oldjuk meg őket, és rajzoljuk fel a pályákat a *p-q* fázistérben!

f.) Láthatjuk, hogy az energiamegmaradás miatt a fázistérben ellipszis-pályákon mozog a rendszer. Jó ötletnek tűnik áttérni olyan kanonikus koordinátákra, ahol ezek az ellipszisek koordinátavonalak. Ezt valósítja meg az alábbi paraméterezés:

$p = m\omega A \cos Q, \quad q = A \sin Q$

Keressünk „1"-es típusú alkotófüggvényt ami ezt a transzformációt generálja!

g.) Adjuk meg az „új" P impulzust, és Q koordinátát a régi q és p változók segítségével!

h.) Adjuk meg az új K(Q,P) Hamilton-függvényt, írjuk fel a Hamilton egyenleteket és oldjuk meg őket!

6.) Feladat

Egy egy szabadsági fokú rendszer Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p^2}{2m} e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 x^2 e^{2\alpha t}.$$

g.) Írja fel a rendszer mozgásegyenleteit. Milyen jól ismert mechanikai rendszert ír le a Hamilton-függvény?

h.) Mutassa meg, hogy a Hamilton-függvényben szereplő p kanonikus impulzus nem a szokásos fizikai „*m v*" impulzus! Mi a kettő közötti kapcsolat?

Tekintse az alábbi alkotófüggvényt:

$$W_1(x,Q) = -xQe^{\alpha t} - \frac{\alpha m}{2} x^2 e^{2\alpha t}$$

i.) Adja meg a W_1 által generált kanonikus transzformációt!

j.) Adja meg az új K(P,Q) Hamilton függvényt! Legyen óvatos, az alkotófüggvény explicit módon függ az időtől!

k.) Írja fel a mozgásegyenleteket az új, P,Q változókban, oldjuk meg!

l.) Transzformáljuk vissza az eredeti p,x változókra a megoldást!
