MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz) | GYAK 8.

1.) Feladat

Homogén, z irányú B mágneses indukciójú térben m tömegű e töltésű részecske mozog. A gravitációs tér és a $\Phi(\mathbf{r})$ elektromos potenciál nulla. A mágneses vektorpotenciált $\mathbf{A}$ = (0, Bx, 0)-nak választottuk (Landau-mérték).

a.) Írjuk fel a részecske Lagrange-függvényét!

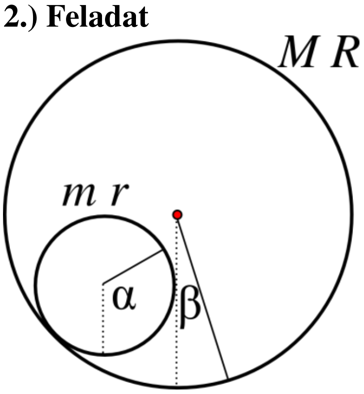
b.) Mutassuk meg, hogy az $x' = x$, $y' = y$, $z' = z + s$ leképzés a Lagrange függvény szimmetriája. A Noether tétel alapján adjuk meg a megfelelő megmaradó mennyiséget!

c.) Mutassuk meg, hogy az $x' = x$, $y' = y + s$, $z' = z$ is szimmetria! Mi a megfelelő megmaradó mennyiség?

d.) Tekintsük a $x' = x + s$, $y' = y$, $z' = z$ transzformációt. Ez láthatóan nem hagyja invariánsan a Lagrange függvényt. Mutassuk meg, hogy a Lagrange-függvény megváltozása ebben az esetben egy teljes időderivált, tehát általánosabban véve ez is szimmetria.

e.) Konstruáljuk meg a d.)-feladatban szereplő transzformációhoz tartozó megmaradó mennyiséget! (Ehhez ki kell egészítenünk a Noether-tétel előadáson szereplő levezetését!)

2.) Feladat



Egy M tömegű R sugarú belül üreges gyűrű könnyen elfordulhat a tengelye körül. Benne belül egy m tömegű r sugarú gyűrű jól tapadva gördülhet. A mechanikai rendszer helyzetét az α és β szögelfordulásokkal jellemezzük, a rendszerre hat a függőleges g gravitációs tér is.

a.) Konstruáljuk meg a rendszer Lagrange-függvényét! Mutassuk meg, hogy

$$L = mr^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}(m+M)R^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - mrR\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} +$$
$$+ mg(R-r)\cos\left(\frac{r\alpha - R\beta}{R-r}\right) + const.$$

b.) Mutassuk meg, hogy az $\alpha' = \alpha + \phi$, $\beta' = \beta + \phi\, r/R$ transzformáció invariánsan hagyja a Lagrange-függvényt! Milyen elmozdulást ír le ez a transzformáció?

c.) Adjuk meg a b.) feladat szimmetriájából következő Noether-féle megmaradó mennyiséget!

d.) Adjuk meg a rendszer Lagrange-féle mozgásegyenleteit! Mutassuk meg közvetlen számolással, hogy a c.)-ben kapott mennyiség megmarad!

3.) Feladat

Egy tömegpont centrális erőtérben mozoghat. Hamilton-függvénye az alábbi alakú:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

a.) Írja fel a tömegpont impulzusmomentumának L_x, L_y és L_z komponensét a $\mathbf{p}$ kanonikus impulzusvektor és $\mathbf{r}$ helyvektor komponenseinek segítségével!

b.) Számítsa ki az $[L_x, x]$ és $[L_x, y]$ Poisson zárójeleket, valamint az $[L_x, p_x]$ és $[L_x, p_y]$ Poisson-zárójeleket!

c.) A b.) feladat eredményeit általánosítva számítsa ki az $[L_i, r_j]$ és $[L_i, p_j]$ Poisson-zárójeleket tetszőleges i-j indexpárra!

d.) Számítsa ki az $[L_i, L_j]$ Poisson-zárójelet tetszőleges i-j indexpárra!

e.) Számítsa ki az $[L_i, H]$ Poisson-zárójelet tetszőleges i-re! Mit mond ez számunkra az impulzusmomentumról?

4.) Feladat

Tekintsük a Kepler-problémát, aminek Lagrange-függvénye

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}.$$

a.) Tekintse az alábbi vektort (a neve Runge-Lenz vektor):
$\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - m\,\alpha\,\mathbf{e}_r$.
Fejezze ki ezen vektor komponenseit úgy, hogy benne csak a kanonikus hely és impulzus komponensek szerepeljenek!

b.) Számítsa ki az $[A_i, H]$ Poisson-zárójelet! Mit mondhatunk ez alapján az **A** vektorról?

c.) Az **A** vektor megmaradását kihasználva fejezzük ki (a mechanika 1 tárgyon látott effektív potenciálos módszernél sokkal egyszerűbben) a keringő bolygó pályáját!
Ehhez tekintsünk egy olyan ahol a pálya síkja az x-y sík, és az **A** vektor mutasson az x irányba. Fejezzük ki az $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}$ skaláris szorzatot az (r,ϕ) polárkoordináták segítségével, majd rendezzük megfelelően a kapott kifejezést és olvassuk le a pályát!

d.) Milyen irányba mutat az **A** vektor? Mit fejez ki a hossza?
