MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	GYAK 7.

1.) Feladat

Az egyik legfontosabb nem-kvadratikus térelmélet az ún. sine-Gordon-model, melynek Lagrange-sűrűsége a tér, idő és a mező megfelelő átskálázása után az alábbi alakot ölti:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t \phi(x,t)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_x \phi(x,t)\right)^2 + \cos\left(\phi(x,t)\right) - 1 \quad .$$

a.) Adja meg a mező Euler-Lagrange mozgásegyenleteit!

b.) Írja fel az energiasűrűség általános kifejezését a modellben!

c.) Adja meg az energiaáram általános kifejezését a modellben!

d.) Keressen $\phi(x,t) = const.$ időben és térben konstans konfigurációkat, amik megoldják a mozgásegyenleteket. Mekkora ezek energiasűrűsége? Melyek teljes energiája véges?

e.) Szeretnénk olyan megoldást kapni, amely az d.) feladat egyik konstans értékéből átvisz a másikba. Mutassa meg, hogy az alábbi időfüggetlen megoldás kielégíti a mozgásegyenletet:

$$\phi_1(x,t) = 4\arctan\left(e^x\right) .$$

Megj.: Ezt álló szoliton megoldásnak nevezzük.

<u>*Segítség:*</u> $$\sin(4\arctan y) = 4\frac{y - y^3}{(1+y^2)^2}$$

f.) Adja meg a $\phi_1(x \to \infty)$ és $\phi_1(x \to -\infty)$ határértékeket! Rajzolja fel a $\phi_1(x)$ függvényt!

g.) Adja meg az energiasűrűséget és integrálját a ϕ_1 megoldás esetén x függvényében!

h.) Mutassa meg, hogy az alábbi időfüggő megoldás is megoldja az mozgásegyenleteket,

$$\phi_2(x,t) = 4\arctan\left(e^{\frac{x - v\,t}{\sqrt{1-v^2}}} \right) .$$

Megj.: Ezt v sebességgel haladó szoliton megoldásnak nevezzük.

i.) Adja meg az energiasűrűséget és integrálját a ϕ_2 megoldás esetén x és t függvényében!

<u>*Segítség:*</u> $$\cos(4\arctan y) = 1 - 8\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

j.) Adja meg az energiaáramot a ϕ_2 megoldás esetén x és t függvényében!

2.) Feladat

Egy egytengelyű ferromágneses spinlánc energiasűrűségét az alábbi kifejezéssel próbáljuk megadni:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_x \mathbf{M})\cdot(\partial_x \mathbf{M}) - \frac{\lambda}{2}M_z^2 \ ,$$

ahol az első tag azt írja le, hogy a kis elemi dipólusok a közeli szomszédjaikkal párhuzamosan szeretnének beállni, a második tag pedig azt, hogy a dipólusok preferálják a $\pm$z irányú beállást. Az elemi dipólusok hossza adott, megfelelő skálázással elérhető, hogy $\mathbf{M}\cdot\mathbf{M} = 1$ legyen. Ezt a kényszert figyelembe vehetnénk Lagrange-multiplikátorral, azonban most más utat járunk.

a.) Paraméterezze a mágnesezettséget gömbi polár koordinátákkal, azaz legyen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}!$$

Írja fel az energiasűrűség kifejezését a ϑ és φ mezők segítségével!

b.) Az energiasűrűség integráljának variálásával vezesse le a lánc egyensúlyi konfigurációit meghatározó egyenletet!

c.) Keressen konstans megoldásokat! Hányat talál? Milyen ezek stabilitása?

d.) Keressen olyan (legkisebb energiájú) megoldást ami az egyik stabil konstans értékből átvisz a másik stabil konstans értékbe (doménfal).