MECHANIKA 2 (2016/17 tavasz)	GYAK 2.

1.) Feladat

Einstein híres vonatának két végébe beleütött a ménkű. A sín melletti földeken dolgozó munkások szerint a két villámcsapás pontosan egyszerre történt. A vonat sebességét jelölje V!

a.) Rajzoljuk fel a vonat elejének és végpontjának világvonalait a Minkowski-síkra! Jelöljük be a két (egyidejű) villámcsapást!
b.) Rajzoljuk be a villámcsapások fényének világvonalait is az ábrára!
c.) A vonat középső kocsijában utazik egy megfigyelő. Rajzoljuk be az utazó megfigyelő tér is időtengelyeit az ábrára!
d.) Az utazó megfigyelő szerint melyik villámcsapás történt korábban?
e.) A vonat (nyugalmi) hossza L_0. Ennek ismeretében mennyi az időeltérés a két esemény között az utazó megfigyelő szerint?

2.) Feladat

A Földről a $t=0$ időpontban két űrhajó indul egymásra merőleges irányban, $3/5\ c$ sebességgel.

a.) Vegyünk fel egy kényelmes koordinátarendszert. Adjuk meg az űrhajók $\mathbf{r}_1(t)$ és $\mathbf{r}_2(t)$ hely-idő függvényét!
b.) Üljünk át az „1"-es űrhajóhoz rögzített rendszerbe! Adjuk meg a „2"-es űrhajó $\mathbf{r}_2'(t')$ hely-idő függvényét ebben a rendszerben!
c.) Adjuk meg a „2"-es űrhajó sebességvektorát ebben az új rendszerben! Mekkora szöget zár-ez be az „1"-es űrhajót a Földdel összekötő egyenessel?

3.) Feladat

Egy relativisztikusan gyors űrhajóval hagyjuk el a Földet, és a sarkcsillag felé száguldunk. Még alig hagytuk el a Földet, amikor kinézünk az ablakon. Hogy néznek ki a szokásos csillagképek? Tegyük fel, hogy egy csillagot a sarkcsillaghoz képest ϕ szögben láttunk a Földről. Hol látjuk az űrhajóból kinézve?

4.) Feladat

Legyen adott két négyesvektor a kontravariáns koordinátáival valamely inerciarendszerben, $a^\mu = (a^0\ \ a^1\ \ a^2\ \ a^3)$ és $b^\mu = (b^0\ \ b^1\ \ b^2\ \ b^3)$. A Minkowski téridő metrikus tenzora pedig

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

a.) Elevenítsük fel a (speciális relativitáselméletnek megfelelő) Einstein-féle összegzési konvenció szabályait! A metrikus tenzor segítségével fejezzük ki a^μ Minkowski-hossznégyzetét, ill. a^μ és b^μ Minkowski-skalárszorzatát!
b.) Elevenítsük fel, hogyan definiáljuk a négyesvektorok alsóindexes (kovariáns) koordinátáit. Adjuk meg az $a_\mu = (a_0\ a_1\ a_2\ a_3)$ és $b_\mu = (b_0\ b_1\ b_2\ b_3)$ alsóindexes koordinátákat, majd ezek segítségével ismét fejezzük ki az *„a"* vektor Minkowski-hossznégyzetét, és az *„a"* és *„b"* vektorok skalárszorzatát, úgy, hogy a formulában már ne jelenjen meg a metrikus tenzor!
c.) Mint láttuk, indexek „lehúzását" a $g_{\mu\nu}$ tenzorral tudjuk elvégezni. Az index „lehúzás" művelet inverze nyilván az index „felhúzás". Adjuk meg az ezt végrehajtó $g^{\mu\nu}$ tenzort!

5.) Feladat

Tekintsük a következő transzformációt:

$$\Lambda^{\mu}_{.\nu} = \begin{pmatrix} 5/3 & 0 & -4/3 & 0 \\ -4/3 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.) Mutassuk meg, hogy ez egy Lorentz-transzformáció!

b.) Tekintsük az $a^{\mu} = (1,1,0,0)$ négyesvektort! Mekkora ennek Minkowski hossz-négyzete? Hajtsuk végre ezen a vektoron a fenti transzformációt! Mutassuk meg, hogy a Minkowski-hossz invariáns maradt!

c.) Tekintsük a $b^{\mu} = (6,1,3,1)$ négyesvektort. Mekkora ennek a Minkowski hossz-négyzete? Mutassuk meg, hogy ez is invariáns maradt a fenti transzformáció után!

d.) Fejezzük ki a b_{μ} vektor komponenseit! Fejezzük ki a transzformált b'_{μ} vektor komponenseit is!

e.) Adjuk meg a Λ mátrix azon alakját, ami az alsó indexes vektorokat Lorentz-transzformálja! $b'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{.\nu} b_{\nu}$

f.) Mutassa meg, hogy az $a^{\mu} b_{\mu}$ Minkowski skalárszorzat invariáns maradt!

g.) Behelyettesítéssel mutassuk meg, hogy $\Lambda_{\rho}^{.\mu} \Lambda^{\rho}_{.\nu} = \delta^{\mu}_{.\nu}$, azaz az alsóindexes vektorok a transzformáció inverzé(nek transzponáltjával) transzformálódnak.