MECHANIKA 2 (2015/16 tavasz)	GYAK 6.

1.) Feladat

Egy keskeny rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullámokat vizsgáljuk. A rúd pontjainak longitudinális elmozdulását a $\xi(x,t)$ elmozdulásmezővel írjuk le. A rúd anyagának Young modulusa E, (nyújtatlan) sűrűsége ρ, keresztmetszete A.

a.) Írjuk fel a kinetikus energia (lineáris) sűrűségének kifejezését az elmozdulásmező időderiváltjának segítségével!
b.) Írjuk fel a rugalmas energia (lineáris) sűrűségének kifejezését az elmozdulás mező x-szerinti deriváltjának segítségével!
c.) Írjuk fel a rendszer Lagrange-sűrűségét!
d.) A legkisebb hatás elvének segítségével vezessük le a rendszer (Euler-Lagrange féle) mozgásegyenletét!
e.) Adjuk meg a teljes (kinetikus + rugalmas) lineáris energiasűrűség kifejezését a rendszerben!
f.) Tekintsük a rúd egy véges darabját, írjuk fel ennek teljes energiáját! Írjuk fel a darab energiájának idő szerinti deriváltját!
g.) Fejezzük ki az energiaáramsűrűséget a modellben! Írjuk fel az energia kontinuitási egyenletét!

2.) Feladat

Egy hajlékony nyújthatatlan szál lineáris tömegsűrűsége λ. A szálat F erővel előfeszítjük. A szál transzverzális kitérését a $\psi(x,t)$ mezővel írjuk le.

a.) Írjuk fel a kinetikus energia sűrűségének kis kitérések esetén érvényes kifejezését!
b.) Mutassuk meg, hogy az előfeszítés ellenében végzett munka miatt az alábbi alakú tag jelenik meg a Lagrange-sűrűségben:

$$F\sqrt{1-(\partial_x\psi)^2}$$

c.) Közelítsük ezt a tagot a $\partial_x\psi$-ben másodrendű tagig!
d.) Írjuk fel a Lagrange-sűrűséget!
e.) Vezessük le az Euler-Lagrange mozgásegyenletet!

3.) Feladat

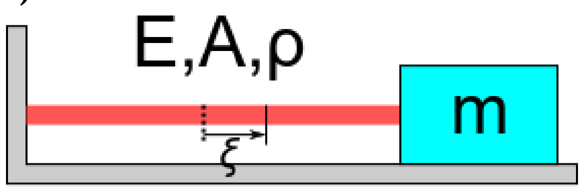
Egy rugalmas rúdon kialakuló transzverzális állóhullám módusokat vizsgáljuk. A rúd keresztmetszeti tényezője Θ, lineáris tömegsűrűsége λ, anyagának Young-modulusa E. A rendszer Lagrange-sűrűsége:

$$\mathcal{L}=\frac{\lambda}{2}(\partial_t u)^2-\frac{\Theta E}{2}(\partial_z^2 u)^2$$

A rúd két végét befalaztuk, ezért ott mind a kitérés, mind annak z szerinti deriváltjai eltűnnek.

a.) Írjuk fel a hatásfunkcionált a rendszerre!
b.) A legkisebb hatás elvéből vezessük le a rendszer Euler-Lagrange mozgásegyenletét
c.) Keressük az egyenlet megoldását szeparált alakban: $u(z,t)=U(z)\varphi(t)$! Adjuk meg külön-külön az $U(z)$-re és $\varphi(t)$-re vonatkozó egyenleteket!
d.) Adjuk meg a rúd lehetséges rezgési frekvenciáit meghatározó egyenletet, és grafikusan oldjuk meg (kvalitative)!

4.) Feladat



Egy rugalmas rúd végére m tömegű testet kötöttünk. A rúd keresztmetszete A, Young-modulusa E, (térfogati) sűrűsége ρ, hossza L.
A rúd pontjainak hosszirányú elmozdulását a $\xi(z,t)$ mezővel írjuk le, a rúd transzverzális kitérése a

vizsgált mozgások során zérus. A tégla helyét az *u(t)* függvénnyel írjuk le, ezért a rendszer hatásfunkcionálja az alábbi alakot ölti:

$$S = \int dt \left\{ \int_0^L dz \left(\frac{\rho A}{2} (\partial_t \xi)^2 - \frac{EA}{2} (\partial_z \xi)^2 \right) + \frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right\}$$

Ha ebből a kifejezésből naiv módon felírjuk a mozgásegyenleteket, nyilvánvalóan rossz eredményt kapunk, a tégla nem lesz a gumiszálhoz kötve. A $\xi(L,t) = u(t)$ kényszert ki kell rónunk.

a.) A kényszert egy Lagrange-multiplikátor segítségével vegye figyelembe! Írja fel a Lagrange multiplikátorral módosított hatásfunkcionált!

b.) Írja fel a hatás δS variációját, amennyiben, ha a közeg ill. tégla kitérésének variációja $\delta u(t)$ és $\delta\xi(z,t)$.

c.) A szokásos módon, parciális integrálással érje el, hogy a hatás-funkcionálban ne jelenjenek meg a δu és $\delta\xi$ variációk deriváltjai! A $\delta\xi$ esetén vigyázzon a $z = L$-nél megjelenő peremtaggal!

d.) A legkisebb hatás elvét alkalmazva adja meg a rendszer mozgásegyenleteit!

e.) Keresse a hullámegyenlet megoldását állóhullám alakban:
$\xi(z,t) = B\sin(kz)\sin(\omega t)$.
Adja meg a k és ω közötti összefüggést!

f.) Az e.) feladatban kapott általános megoldást helyettesítse be a test mozgásegyenletébe! Ez alapján adja meg a lehetséges k hullámszámokat meghatározó (transzcendens) egyenletet! Az egyenletet megoldania nem kell!

g.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege elhanyagolhatóan kicsi. Mekkorák ekkor a rendszer sajátfrekvenciái? Hogyan értelmezhető az eredmény?

h.) Tekintsük azt a határesetet, amikor a tégla tömege nagyon nagy. Mekkora ekkor a legkisebb sajátfrekvencia? Minek felel ez meg? Mekkora a többi sajátfrekvencia? Hogyan értelmezhetők ezek?

i.) Fejezzük ki az energiasűrűséget és energiaáramsűrűséget a rúdban. Mutassuk meg, hogy a rúdból „kifolyó” energiaáram éppen a test mozgási energiájává alakul!

5.) Feladat

Tekintsünk egy köbös szimmetriájú egykristályból készült háromdimenziós közeget, melyben a rugalmas (szabad)energiasűrűség kifejezése:

$$f = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} ,$$

ahol C_{ijkl} a rendszer Hooke-tenzora, ε_{ij} pedig a deformációtenzor.

a.) Idézzük fel, milyen szimmetria tulajdonságai vannak C_{ijkl}-nek! Ez alapján általánosan hány független eleme van a tenzornak? Ne csak rávágjuk, számoljuk össze rendesen!

b.) Adjuk meg a független elemeket köbös szimmetria esetén!

c.) Írjuk fel a rendszer Lagrange-sűrűségét, úgy hogy benne az elmozdulásmező tér és időderiváltjai jelenjenek meg!

d.) Adjuk meg a rendszer Euler-Lagrange mozgásegyenleteit!

e.) Keressük a mozgásegyenletek síkhullám megoldásait! Adjuk meg a hullámszámvektor és a polarizációvektor kapcsolatát leíró egyenletet!

f.) Adjuk meg egy szimmetriatengely irányában haladó (k,0,0) síkhullám esetén milyen polarizációvektorokat kapunk, és mekkorák a terjedési sebességek?

g.) Adjuk meg egy $\frac{1}{\sqrt{3}}(k,k,k)$ hullámszámú síkhullám esetén a lehetséges polarizációvektorokat, és terjedési sebességeket!