2. statisztikus fizika gyakorlat

2023. március 13.

1. Tekintsük a klasszikus lineáris oszcillátort mikrokanonikus eloszlásban (E energia és δE energiabizonytalanság mellett)!
   (a) Határozzuk meg a hely $\langle x^2 \rangle$ második momentumát! Dolgozzunk a $\rho(x,p) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(x,p) - E\right]$ sűrűségfüggvénnyel!
   (b) Határozzuk meg az impulzus $\langle p^2 \rangle$ második momentumát! Dolgozzunk a $\rho(x,p) = \frac{1}{\Omega_{\delta E}(E(x,p))}\mathbb{I}\left[E - \delta E, E\right]$ sűrűségfüggvénnyel!
   (c) Mit mondhatunk e kettő viszonyáról?
   (d) Határozzuk meg a hely szórásnégyzetét!
   (e) Határozzuk meg az impulzus marginális eloszlását, $\rho(p)$ az állapotszám, $\Omega_{\delta E}(E)$ és a hozzá tartozó δE energiabizonytalanság segítségével!
   (f) Határozzuk meg a hely $\langle x^4 \rangle$ negyedik momentumát!

2. Tekintsük szabad részecskék mozgását egy kétdimenziós körlapon. A részecskék egy a körlap belső határán elhelyezkedő pontszerű „dudoron” szóródhatnak, mely által a mozgás ergodikussá válik.
   (a) Határozzuk meg polár koordináta-rendszerben a fázistérbeli mozgás sűrűségfüggvényét, a $\rho(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(p_r, p_\varphi, r, \varphi) - E\right]$ alakban!
   (b) Határozzuk meg a hely marginális sűrűségfüggvényét!

3. Tekintsünk egy pattogó labdát, melyet kezdetben v_0 sebeséggel indítottunk el $z = 0$-ról függőlegesen felfelé, a gravitációs gyorsulás értéke g.
   (a) Határozzuk meg a labda impulzusának időátlagát!
   (b) Határozzuk meg a labda impulzusának sokaság átlagát, a sűrűség függvény $\rho(p,z) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(p,z) - E\right]$ alakú kifejezésének segítségével!

4. Adott két dobozunk, amelyekbe részecskéket pakolunk egymástól függetlenül, összesen N darabot. Az első dobozba való jutás valószínűsége p.
   (a) Mekkora annak a $P(n)$ valószínűsége, hogy az első dobozba éppen n részecske jutott?
   (b) Mennyi az első dobozban lévő részecskék átlagos száma és a részecskeszám szórása? Mekkora a relatív hiba?
   (c) Nagy N esetét feltéve adjuk meg $P(n)$ Gauss-közelítését! (Tipp: Használjuk fel $\ln P(n)$ Taylor-sorát másodrendig!)
   (d) Egy $2 \times (10\,\mathrm{nm})^3$ térfogatú dobozban 50 ideális gázatom van (ez nagyságrendileg megfelel a légköri levegő molekuláinak darabsűrűségének). A nagyságrendileg 300 $\frac{m}{s}$ levegőbéli hangsebesség alapján becsüljük meg az időt, amíg egy részecske átmegy a doboz egyik feléből a másikba! Az ennyi idő alatt kialakuló konfigurációkat függetlennek tekintve nagyságrendileg mennyi időbe telik, amíg az összes részecske összegyűlik a doboz egyik felében? Mekkora ugyanez az idő egy $2\,\mathrm{mm}^3$ térfogatú dobozban (arányosan több részecskével)?

Példák otthoni gyakorlásra:

1. Tekintsük a klasszikus lineáris oszcillátort mikrokanonikus eloszlásban (E energia és δE energiabizonytalanság mellett)!
   (a) Határozzuk meg az impulzus $\langle p^4 \rangle$ negyedik momentumát! Dolgozzunk a gyakorlaton levezetett $\rho(x,p) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(x,p) - E\right]$ sűrűségfggvénnyel!
   Segítség: $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3\pi}{8}$

(b) Határozzuk meg a hely marginális eloszlását, $\rho(x)$! Dolgozzunk a $\rho(x,p) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(x,p) - E\right]$ sűrűségfüggvénnyel!

2. Tekintsük szabad részecskék mozgását egy kétdimenziós körlapon belül. A részecskék egy a körlap belső határán elhelyezkedő pontszerű „dudoron” szóródhatnak, mely a részecskék energiáját nem változtatja meg, de a mozgás ezáltal ergodikussá válik.

   (a) Határozzuk meg Descartes koordináta-rendszerben a fázistérbeli mozgás sűrűségfüggvényét, a $\rho(p_x, p_y, x, y) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(p_x, p_y, x, y) - E\right]$ alakban!

   (b) Határozzuk meg a hely marginális sűrűségfüggvényét, $\rho(x, y)$!

3. Tekintsünk egy pattogó labdát, melyet kezdetben v_0 sebeséggel indítottunk el $z = 0$-ról, a gravitációs gyorsulás értéke g.

   (a) Határozzuk meg a labda z magasságának időátlagát arra az időtartamra, amíg a labda $z = 0$-ról eléri a maximális h magasságát!

   (b) Határozzuk meg a labda z magasságának sokaság átlagát, a sűrűség függvény $\rho(p, z) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(p, z) - E\right]$ alakú kifejezésének segítségével és mutassuk meg, hogy ez megegyezik az időátlaggal! Használjuk a gyakorlaton levezetett sűrűség függvényt, $\rho(p, z) = \mathcal{N}\delta\left[\mathcal{H}(p, z) - E\right]$!

   (c) **Bónusz:** Határozzuk meg a labda magasságának $\rho(z)$ marginális eloszlását!