Név:

Neptun:

StatFiz gyakorlat 1., 2. nagy ZH

2023. május 26.

1. feladat (25 pont) Vizsgáljunk egy óriás abszorbens molekula és egy adott p nyomású és T hőmérsékletű ideális gáz kölcsönhatását. A molekula legfeljebb két atomot tud megkötni a gázmolekulákból. Ha egy atom van megkötve a molekulán akkor a kötési energia $-\varepsilon$, ha két atom van megkötve a molekulán akkor a kötési energia -2ε.

(a) Határozzuk meg a $\mathcal{Z}$ nagykanonikus állapotösszeget!

(b) Határozzuk meg a Φ nagykanonikus potenciált!

(c) Határozzuk meg az abszorbeált gázrészecskék átlagos számát a hőmérséklet és a környezet gázrészecskéi sűrűségének függvényében, $\langle N_{\text{absz}} \rangle$! (Tekintsünk úgy a rendszerre, hogy az egy ideális gáz atomokból álló környezettel egyensúlyban van, azaz az ideális gáz és a molekula azonos kémiai potenciállal rendelkeznek! Az ideális gáz kémiai potenciálja a gáz sűrűségének függvényében $\mu = k_B T \ln(\lambda_T^3 n)$, ahol $n = \frac{N}{V}$ az ideális gáz sűrűsége, $\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ pedig a termikus hullámhossz.)

(d) Vizsgáljuk meg az $n \to 0$ és az $n \to \infty$ határeseteket, állandó $T > 0$ hőmérsékleten!

2. feladat (25 pont) Vizsgáljuk meg az A területbe zárt *kétdimenziós, ultrarelativisztikus* spintelen ideális *bozonikus* kvantumgáz ($\varepsilon = c|\mathbf{p}|$) kémiai potenciáljának kvantumkorrekcióját a klasszikus limeszhez képest, $\frac{\mu}{k_B T} \ll -1$!

(a) Mutassuk meg, hogy az állapotsűrűség $\rho(\varepsilon) = \frac{2\pi A}{(hc)^2}\varepsilon$!

(b) Fejtsük sorba az átlagos részecskeszámot megadó energiaintegrált $e^{\beta\mu}$ szerint másod rendig! (Segítség: $\int\limits_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.)

(c) Határozzuk meg a sorfejtés $e^{\beta\mu}$ szerinti első rendjéből a klasszikus eredményt!

(d) A részecskeszám sorfejtéséből emeljünk ki $e^{\beta\mu}$-t, és az egyenletet átrendezve fejezzük ki ezt a kiemelt $e^{\beta\mu}$-t! Az így kapott egyenletet ismét fejtsük sorba $e^{\beta\mu}$ szerinti első rendig!

(e) Az utolsó sorfejtésbe beleírva a klasszikus $e^{\beta\mu_{\text{kl}}}$ eredményt, határozzuk meg a kémiai potenciál vezető kvantumkorrekcióját $n = \frac{\langle N \rangle}{V}$ szerint másod rendben! (Más úton történő megoldásokat is elfogadunk!)

3. feladat (25 pont) Vizsgáljuk meg a A területbe zárt *kétdimenziós, nem relativisztikus* ideális Fermi-gáz alacsony hőmérsékleti viselkedését, $\varepsilon = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$!

(a) Mutassuk meg, hogy az állapotsűrűség $\rho(\varepsilon) = \frac{2\pi A m}{h^2}$!

(b) Ennek segítségével számoljuk ki az $\langle N \rangle$ átlagos részecskeszámot *zérus hőmérsékleten*, majd invertálva ezt a kifejezést adjuk meg a Fermi-energiát a részecskesűrűség függvényében!

(c) Írjuk fel az $\langle N \rangle$ átlagos részecskeszámot alacsony $T > 0$ hőmérsékleten is, és alkalmazzuk a Bethe–Sommerfeld-sorfejtést! (Segítség: a Bethe–Sommerfeld sorfejtés általános alakja: $\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\, r(\varepsilon) f(\varepsilon) \approx \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\, r(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} r'(\varepsilon)(k_B T)^2$, ahol $f(\varepsilon)$ a Fermi függvény.)

(d) Mutassuk meg, hogy a kémiai potenciálnak nincs $(k_B T)^2$ rendű korrekciója!

(e) Írjuk fel az $\langle E \rangle$ átlagos energiát mint energiaintegrált alacsony T hőmérsékleten, és használjuk ismét a Bethe–Sommerfeld-sorfejtést! Adjuk meg az energiát $(k_B T)^2$ rendig!

(f) Határozzuk meg a hőkapacitást! Milyen a hőmérsékletfüggés?

LAPOZZ!

4. feladat (25 pont) Vizsgáljuk meg, van-e Bose–Einstein-kondenzáció V térfogatba zárt spintelen *három-dimenziós, tömeg nélküli* ideális bozongáz esetén, $\varepsilon = c|\mathbf{p}|$!

(a) Mutassuk meg, hogy az állapotsűrűség $\rho(\varepsilon) = \frac{8\pi V m}{(hc)^3}\varepsilon^2$!

(b) Írjuk fel a részecskeszámot mint energiaintegrált általánosan, T hőmérséklet és μ kémiai potenciál mellett!

(c) Vizsgáljuk meg az energiaintegrált $\mu = 0$ esetén, adott T hőmérsékleten! (Tipp: vizsgáljuk meg az energiaintegrált egy kicsi véges intervallumon, ahol esetleg divergenciát várunk, és itt fejtsük sorba az integrandust!) Ennek segítségével mutassuk meg, hogy a vizsgált modellben fellép a Bose-Einstein kondenzáció jelensége!

(d) Határozzuk meg a kondenzációs átalakulás kritikus hőmérsékletét! (Segítség: írjuk fel a részecskeszám várható értékét megadó energia integrált a $\mu = 0$ pontban és dimenziótlanítsuk az integrált. Ezt követően fejezzük ki a dimenziótlan integrál értékével és a részecskeszám sűrűségével a kritikus hőmérsékletet!)

(e) Írjuk fel $T < T_0$ hőmérsékleten az átlagos energiát megadó energiaintegrált! (Segítség: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t \approx 2.4$. Figyelem: $T < T_0$ esetén $\mu = 0$ és az energiához csak a kondenzátumon kívüli részecskék járulnak hozzá!)

(f) Adjuk meg a hőkapacitást $T < T_0$ esetén!

(g) **Bónusz +3 pont:** Tudván, hogy kicsivel a kritikus hőmérséklet felett $|\mu| \sim T - T_0$, adjuk meg a hőkapacitást $T \gtrsim T_0$ esetén is!