

1. FELADAT

25 pont

Gömbszimmetrikus $V(r)$ potenciál esetén a hullámfüggvény $P_l(r)$ radiális komponensét meghatározó radiális Schrödinger-egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2(rP_l(r))}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} P_l(r) + V(r)P_l(r) = EP_l(r).$$

- a) Határozzuk meg az $l = 0$ állapotok energiáját és hullámfüggvényét a következő potenciál esetében: (10 pont)

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{ha } r \leq R \\ \infty & \text{ha } r > R \end{cases}$$

- b) Hogyan módosul az $l = 0$ állapotok energiája a perturbációs számítás első rendjében a következő perturbáló potenciál hatására: (15 pont)

$$W(r) = \begin{cases} V_0 \cos(\frac{\pi}{2R}r) & \text{ha } r \leq R \\ 0 & \text{ha } r > R \end{cases}$$

$$\text{Segítség: } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

2. FELADAT

25 pont

Egy $\ell = 1$ perdületű rendszer Hamilton-operátora a következő alakú:

$$H_0 = aL_z + bL_z^2, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

- a) Írjuk fel a Hamilton-operátor mátrixát az $\{|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ altéren! Mik a H_0 sajátértékei és sajátvektorai! (5 pont)
- b) A rendszert B indukciójú homogén x irányú mágneses térbe helyezzük. A mágneses teret tartalmazó $W = \frac{\mu_B B}{\hbar} L_x$ operátort tekintsük perturbációnak! Írjuk fel a W operátor mátrixát a háromdimenziós altéren! (10 pont)
- Segítség:* Az L_x operátor mátrixának kiszámításához használja az $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ léptetőoperátorokat.
- c) Határozzuk meg az energiaszintek korrekcióját a perturbációs számítás első rendjében az (i) $\hbar a \neq b$ és (ii) $\hbar a = b$ esetekben! (10 pont)

3. FELADAT

25 pont

Hogyan módosulnak egy lineáris harmonikus oszcillátor potenciálban mozgó q töltésű részecske energianívói a perturbációs számítás másodrendjében, ha azt $\mathcal{E}$ térerősségű homogén elektromos térbe helyezzük?

Segítség: A perturbálatlan rendszer Hamilton-operátora $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, a perturbáció operátora $W = -\mathcal{E}qx$.

$$\text{A másodrendű energiakorrekció } E_n^{(2)} = - \sum_{m(\neq n)} \frac{|\langle \varphi_n | W | \varphi_m \rangle|^2}{E_m - E_n}.$$

A W operátor mátrixelemének kiszámításához használja a léptetőoperátorokat:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + i \frac{p_x}{p_0} \right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - i \frac{p_x}{p_0} \right), \quad \left(x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega} \right)$$

4. FELADAT

25 pont

Egy q töltésű, egydimenziós harmonikus oszcillátor potenciálban mozgó részecske $t = 0$ időpontban alapállapotban van, majd τ ideig bekapcsolunk egy $\mathcal{E}$ nagyságú homogén elektromos teret. A tér kikapcsolása után hogyan fog változni a rendszer $D(t) = q \langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle$ dipólusmomentuma az időfüggő perturbációszámítás első rendje szerint?

Segítség:

Az elsőrendű hullámfüggvény

$$|\psi^{(1)}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t} |\varphi_0\rangle + \sum_{n \neq 0} c_n^{(1)}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt} |\varphi_n\rangle ,$$

ahol E_n és $|\varphi_n\rangle$ a harmonikus oszcillátor sajátenergiái és sajátállapotai, valamint

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_0)t'} W_{n0}(t') .$$

A 3. feladathoz hasonlóan, $W_{n0}(t)$ számításához használjuk a léptetőoperátorokat.