

1. FELADAT

(20 pont)

Határozzuk meg egy balról bejövő síkhullám áthatolási és visszaverődési együtthatóit a következő potenciál esetén:

$$V = -\gamma\delta(x) .$$

$$\text{Segítség: } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\psi'(x + \varepsilon) - \psi'(x - \varepsilon)) = -\frac{2m\gamma}{\hbar^2} \psi(x)$$

2. FELADAT

(25 pont)

Egy részecske az alábbi egydimenziós potenciálban mozog ($V_0 > 0$, $\gamma > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x > 0 \\ V_0 - \gamma\delta(x) & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

A kötött állapot hullámfüggvény alakja:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\alpha x} & \text{ha } x \leq 0 \\ Be^{-\beta x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Írjuk fel a határfeltételeket, majd mutassuk meg, hogy $\alpha - \beta = V_0/\gamma$, (10 pont)

b) valamint, hogy a kötött állapot létezésének feltétele $\frac{2m}{\hbar^2}\gamma^2 > V_0$! (10 pont)

c) Mi a kötött állapot energiája? (5 pont)

3. FELADAT

(30 pont)

Egy $\mathcal{E}$ térerősségű homogén elektromos térbe helyezett q töltésű lineáris harmonikus oszcillátor Hamilton operátora

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mathcal{E}qx_0}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+) ,$$

ahol $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)$ a lefelé léptető operátor, ($x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$.) Vezessük be a $\hat{b} = \hat{a} + d$ és $\hat{b}^+ = \hat{a}^+ + d$ operátorokat, ahol $d \in \mathbb{R}$.

a) Mutassuk meg, hogy $[\hat{b}, \hat{b}^+] = [\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{I}$! (5 pont)

b) Hogyan válasszuk meg a d paramétert, hogy a Hamilton operátort az alábbi alakban írassuk fel?

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + E^*$$

Mi lesz az E^* energia értéke? (15 pont)

c) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{dE_n(\mathcal{E})}{d\mathcal{E}} = -q \langle n | \hat{x} | n \rangle ,$$

ahol E_n a $\hat{H}$ Hamilton-operátor n -ik sajátértéke ($n = 0, 1, 2, \dots$), mely az $\mathcal{E}$ térerősség függvénye! (10 pont)

4. FELADAT

(25 pont)

Gyakorlaton bizonyítottuk, hogy egy egydimenziós időfüggetlen Schrödinger-egyenlet kötött (azaz normálható) sajátállapotai nemdegeneráltak.

a) Bizonyítsuk be, hogy a kötött sajátállapotok ψ_n hullámfüggvényei mindig választhatóak valósnak, azaz $\psi_n(x) \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$)! (10 pont)

b) Lássuk be, hogy az impulzus várható értéke kötött állapotban zérus, továbbá, ha ψ_n és ψ_m két különböző kötött állapot valós hullámfüggvényei, akkor $p_{nm} = \langle \psi_n | \hat{p} | \psi_m \rangle$ tisztán imaginárius értékű! (5 pont)

c) Tekintsük két kötött állapot normált szuperpozícióját ($n \neq m$),

$$\psi(x) = \cos(\theta/2)\psi_n(x) + e^{i\phi} \sin(\theta/2)\psi_m(x),$$

ahol $0 \leq \theta \leq \pi$ és $-\pi \leq \phi < \pi$! Hogyan kell megválasztani a θ és ϕ paramétereket, hogy $|\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle|$ a lehető legnagyobb legyen? Mi lesz ez a maximális érték? (10 pont)