Példák: Elektromos terek anyag jelenlétében

Érdemes a szigetelőkre érvényes határfeltételt átfogalmazni egy polarizációs felületi töltéssűrűségre. Ezt kétféleképpen lehet:

1. Egy V térfogatban elhelyezkedő $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ dipólsűrűség potenciálja

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_V d^3\mathbf{x}' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \tag{1}$$

amit az előadáson is tanultak szerint a

$$\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{2}$$

és

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) =& \frac{\nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &+ \mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned}$$

felhasználásával a

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) =& -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_V d^3\mathbf{x}' \frac{\nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\partial V} d^2\mathbf{x}' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned}$$

alakba lehet átírni. Az itt megjelenő

$$\rho_P(\mathbf{x}) = -\mathrm{div}\mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad \sigma_P(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) \tag{3}$$

kifejezések értelmezhetők a polarizációs (más néven "kötött") térfogati, illetve felületi töltésként, amelyekkel a V térfogatban elhelyezkedő $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ dipólsűrűség helyettesíthető.

2. Egy másik módon a térfogatot akkorának választjuk, hogy a $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ dipólsűrűség teljességgel a belsejében legyen. Ekkor a felületi integrál tag zérus, viszont (szabad felületi töltések hiányában) a $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ elfoglalta tartomány határán teljesíteni kell a

$$\mathbf{n} \cdot [\epsilon_0 \mathbf{E} - (\epsilon_0 \mathbf{E}_b + \mathbf{P})] = 0 \tag{4}$$

határfeltételt, ahol $\mathbf{E}$ az elektromos térerősség a szigetelőn kívül, $\mathbf{E}_b$ pedig belül. Ebből

$$\epsilon_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_b) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \tag{5}$$

ami pont egy

$$\sigma_P(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

polarizációs felületi töltéssűrűségnek felel meg.

ekkor továbbá érdemes bevezetni a polarizácó sűrűség és a térerősség közöti eltérés jellemző elotlási vektort

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \,. \tag{7}$$

Tehát míg az eltolsái vektort csak a szabad töltések keltik, addig az elektromos teret mind a szabad mind a kötött töltések, illetve polarizáció sűrűségre egy kötött töltésekkel felírt MAxwell egyenlet alkalamzható:

$$\mathrm{div}\mathbf{P} = -\rho_{\mathrm{pol}} \,. \tag{8}$$

I. POLARIZÁLT GÖMB TERE

1. Számolja ki egy homogén polarizációjú, R sugarú gömb elektromos terét!

2. Egy R sugarú gömb polarizációja

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = k\mathbf{r}, \tag{9}$$

ahol k egy konstans, $\mathbf{r}$ a középpontból eredő vektor. Számolja ki a σ_P, ρ_P "kötött" töltéseket, valamint az elektromos teret a gömbön belül és kívül!

II. TÖLTÉS DIELEKTRIKUM FÖLÖTT

Adott egy töltés a z-tengelyen, a $z = a$ pontban. A térnek a $z < 0$ részét χ_e szuszceptibilitású dielektrikum tölti ki. Mekkora erő hat a ponttöltésre?

III. SÍKKONDENZÁTORBA RÉSZBEN BEHELYEZETT DIELEKTRIKUM

Adott egy síkkondenzátor, amely két $L \times L$ méretű síklapból áll, amelyek között a távolság d. Továbbá adott egy ϵ permittivitású dielektrikum, amelynek a dimenziói ugyancsak $L \times L \times d$. A dielektrikumot a kondenzátor egyik oldala felől a kondenzátorba helyezzük. Mekkora munkát kell végeznünk ahhoz, hogy a dielektrikum és a síkkondenzátor mindkét lapja $L \times x$ felületen érintkezzen, ha

1. a kondenzátoron a töltés Q állandó?

2. a kondenzátoron lévő U potenciálkülönbség állandó?

Számolja ki a két esetben a dielektrikumra ható erőt? Mivel magyarázható a különbség a két eset között? (Érdemes az állandó potenciálú behelyezést két lépésben végrehajtani, először bevinni a dielektrikumot állandó töltés mellett, majd egy feszültségforrás segítségével visszakompenzálni a potenciálkülönbséget az eredeti értékre!)

IV. ANALÓGIA AZ ELEKTROSZTATIKA ÉS AZ EGYENÁRAMOK LEÍRÁSA KÖZÖTT

A szigetelők (szabad töltések nélküli) elektrosztatikájának alapegyenletei

$$\text{div}\,\mathbf{D} = 0 \quad \text{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{10}$$

és az egyenáramok leírása

$$\text{div}\,\mathbf{j} = 0 \quad \text{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{11}$$

között analógia áll fenn. Ennek segítségével az elektrosztatika megoldási módszereit lehet egyenáramú elrendezések számolására használni.

V. FÖLDELÉSI ELLENÁLLÁS

A földbe d mélységben elástunk egy a sugarú fémgömböt, amelyhez egy vezető huzalt erősítettünk. A huzal másik végét egy elektromos gép földelési csatlakozójához kötöttük. Keressük a gömbnek az R_f ún. "földelési ellenállását" az alábbi módon.

Tudjuk, hogy a föld elektromos vezetőképessége σ és a felette lévő levegőé zérus. Folyjék a huzalon I áram. Ekkor a gömbből kilépő áram csak a földben folyhat. Az analógia miatt egy olyan elektrosztatikai elrendezést kell találni, amely esetén a földben fellépő térerősség erővonalai nem lépnek át a levegőbe. Ez elérhető egy olyan $(+Q)$ tükörtöltéssel, amely megegyezik a földben lévő gömb $(+Q)$ töltésével és egy ugyancsak a sugarú fémgömbön helyezkedik el.

1. Mi a Q töltésnek megfelelő mennyiség az egyenáramú elrendezésben?
2. Határozzuk meg (közelítőleg) a kapott elrendezésben a Φ elektromos potenciálfüggvényt és ennek alapján az R_f földelési ellenállást!
3. Határozzuk meg a föld felületén a potenciálfüggvényt!
4. Határozza meg a maximális "lépésfeszültséget"!

VI. KIS ÜREGEK EGY NAGY KITERJEDÉSŰ DIELEKTRIKUMBAN

Adott egy nagy kiterjedésű dielektrikum, melyben az elektromos tér $\mathbf{E_0}$, és az elektromos eltolás-vektor $\mathbf{D_0} = \epsilon_0\mathbf{E_0} + \mathbf{P}$.

1. Egy kis gömb alakú üreget vájunk ebben a szigetelőben. Számolja ki az elektromos teret, valamint az elektromos eltolás-vektort a $\mathbf{D_0}$ és $\mathbf{P}$ függvényében a lyuk középpontjában!
2. Számolja ki ugyanezeket a mennyiségeket abban az esetben, ha egy vékony tű alakú üreget vájunk a szigetelőben!
3. Számolja ki ugyanezeket a mennyiségeket abban az esetben, ha egy lapos korong alakú üreget vájunk a szigetelőben!

[A vájt üregek elég kis méretűek ahhoz, hogy $\mathbf{P}, \mathbf{E_0}, \mathbf{D_0}$ homogénnek tekinthetők. Segítség: az üregek kivájásának ugyanaz a hatása, mintha egy ellentétes irányban polarizált, az üreg alakjával megegyező tárgyat helyeznénk az üreg helyébe.]