Vektor kalkulus - ismétlés

Jelölések:

$$\text{grad } f = \nabla f$$
$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$
$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

ahol

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

a nabla operátor, $\cdot$ a skaláris és $\times$ a vektoriális szorzatot jelöli. A Laplace operátor

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

I. SZORZATOK DERIVÁLÁSA

Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat!

1.
$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

2.
$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

II. GRADIENS/GAUSS/STOKES-TÉTEL

1. Adott a következő vektormező:
$$\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\hat{\mathbf{y}} + (4yz^2)\hat{\mathbf{z}}. \tag{1}$$
Adott ezenkívül a következő felület: egy egységnégyzet, amelynek az egyik sarka az origóban, két oldala pedig a pozitív y, z tengelyek mentén találhatók.
   (a) Számolja ki a vektormező rotációját!
   (b) Ellenőrizze a Stokes-tétel érvényességét erre a vektorfüggvényre az adott felületen!

III. PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

Mutassa meg a következő azonosságokat! Az $\int_{\mathbb{V}} ...d^3\mathbf{r}$, $\int_{\mathbb{F}} ...d^2\mathbf{f}$, $\int_{\mathbb{C}} ...d\mathbf{l}$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

1.
$$\int_{\mathbb{V}} f(\nabla \cdot \mathbf{A})d^3\mathbf{r} = -\int_{\mathbb{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla f)d^3\mathbf{r} + \int_{\mathbb{F}} f\mathbf{A} \cdot d^2\mathbf{f}. \tag{2}$$

2.
$$\int_{\mathbb{V}} d^3\mathbf{r}'\frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_{\mathbb{F}} d^2\mathbf{f}' \cdot \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_{\mathbb{V}} d^3\mathbf{r}'\frac{\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{3}$$

IV. A GAUSS ÉS A STOKES TÉTELBŐL KÖVETKEZŐ TOVÁBBI TÉTELEK

Bizonyítsa be a következő állításokat! Az $\int_{\mathbb{V}} ...d^3\mathbf{r}$, $\int_{\mathbb{F}} ...d^2\mathbf{f}$, $\int_{\mathbb{C}} ...d\mathbf{l}$ jelölések térfogati, felületi, valamint vonalmenti integrálokat jelentenek.

1. $\int_{\mathbb{V}}(\nabla T)d^3\mathbf{r} = \oint_{\partial\mathbb{V}} T d^2\mathbf{f}$

   {Javaslat: Alkalmazza a Gauss tételt a $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$ kifejezésre (ahol $\mathbf{c}$ egy konstans vektor), és alkalmazza a szorzatmezők deriválására érvényes szabályokat.}

2. $\int_{\mathbb{V}}[T\nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U)]d^3\mathbf{r} = \oint_{\partial\mathbb{V}}(T\nabla U) \cdot d^2\mathbf{f}$

   {Javaslat: Alkalmazza a Gauss tételt a $\mathbf{v} = T\nabla U$ kifejezésre.}

   {Megjegyzés: Ez **Green 1. azonossága.**}

V. DIRAC δ-FÜGGVÉNY

1. Vázolja fel a
$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{4}$$
vektorfüggvény "erővonalait" ($\mathbf{r} = (x, y, z), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

2. Számolja ki $\mathbf{v}$ divergenciáját. Miért meglepő ez az eredmény a felvázolt vonalakkal összehasonlítva?

3. A Dirac δ-függvény segítségével megoldhatjuk a fenti "paradoxont." A
$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{5}$$
vektormező divergenciája nulla minden pontban, az origó kivételével, ahol viszont szinguláris. A három-dimenziós Dirac δ-függvény definíciójából kiindulva
$$\int_{\mathbb{V}} d^3\mathbf{r}\delta^3(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{0}). \tag{6}$$
A Gauss tétel
$$\int_{\mathbb{V}} d^3\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \int_{\mathbb{F}} d^2\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{7}$$
segítségével mutassa meg, hogy
$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{8}$$
valamint, hogy
$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}). \tag{9}$$

VI. VEKTOR DERIVÁLT SZÁMOLÁSOK

Számolja ki az alábbi deriváltakat!

1. $\mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}$

2. $\mathrm{grad}\,\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$

VII. SZÁMOLÁSOK DIRAC δ-FÜGGVÉNNYEL

Számolja ki az alábbi integrált!

1. $\int_{\mathbb{V}}(r^4+r^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})+c^4)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{c})d\mathbf{r}$, ahol $\mathbb{V}$ egy 6 egység sugarú gömb az origó körül, és $\mathbf{c} = 5\hat{x} + 3\hat{y} + 2\hat{z}$, amelynek hossza c.