Példák: Magnetosztatika, mágneses anyagok

I. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

1. Mágneses dipólus:
A áram elrendezéstől kellően messze, $r \gg d$, ahol d az áram elrendezés átmérője, távolságra vizsgálva a mágneses vektorpotenciált az első rendű tag $\sim \frac{1}{r}$ kiesik sztatikus esetben $\Leftrightarrow$ $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho = 0$, míg a másorendű tagot $\sim \frac{1}{r^2}$ nevezzük mágneses dipólusnak

$$\mathbf{m} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{2}$$

Vékony egyenes vezető esetén, ahol $\mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathrm{d}\mathbf{r}\, I$:

$$\mathbf{m} = I \int \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r} \Rightarrow \text{ zárt görbe esetén: } \mathbf{m} = I \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,. \tag{3}$$

2. Mágneses skalárpotenciál:
Megszorítva vizsgálódásunkat arra térrészre, ahol $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, az elektrosztatikus potenciál mintájára bevezethetjük a mágneses skalárpotenciált:

$$\mathbf{H} = -\nabla \Psi_m\,, \tag{4}$$

azonban, ha ezt olyan térrészben tesszük, mely nem egyszeresen összefüggő, azaz van benne egy szingularitás, azaz a tartományt keresztezi egy áram, akkor gondoskodnunk kell a skalárpotenciálnak egyrészt az egyértékűségéről, illetve arról, hogy legyen benne egy ugrás, amivel visszakapjuk az Ampere törvényt:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathbf{H} = -\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \nabla \Psi_m = \Psi_m(\mathbf{r}_0 - 0) - \Psi_m(\mathbf{r}_0 + 0) \equiv \mu_0 I\,, \tag{5}$$

ahol $\mathbf{r}_0$ egy tetszőleges kezdőpont a zárgörbén és a ± 0 jelölés indikálja, hogy történt egy ugrás a függvény értékében a zárt görbe mentén, amely definíció szerint arányos a körbezárt árammal.
Jó példa erre a végtelen egyenes vezető:

$$\mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,, \tag{6}$$

$$\Psi_m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \varphi\,. \tag{7}$$

Ekkor telejsül, hogy $\mathbf{H} = -\nabla \Psi_m$, illetve az is, hogy tetszőleges az origót/áramot körbezáró görbe mentén vett integrálja $-\nabla \Psi_m$-nek éppen $\Psi_m(0) - \Psi_m(2\pi) = \mu_0 I$, mindazonáltal, hogy a skalárpotenciál továbbra is egyértékű!

3. Mágneses tér anyag jelenlétében:
A legalacsonyabb rendű közelítés a mágnesezhető anyagok modellezésére, egy mágneses dipólsűrűség bevezetése:

$$\mathbf{m} = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, \mathbf{M}(\mathbf{r}) \tag{8}$$

Ekkor a teljes mágneses tér szétválaszható a szabad áramok által keltett tér és a polarizált áramok átlal keltett tér összegére:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{9}$$

ahol definíció szerint

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_{\mathrm{tot}} \tag{10}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\mathrm{sz}} \tag{11}$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{\mathrm{pol}} \tag{12}$$

Továbbá a határfeltételek ekkor egy tetszőleges mágnesezhető anyag S határán $\mathbf{n}$ normálvektorral az adott felületi pontokban:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_k-\mathbf{B}_b)=0 \Leftrightarrow B_n \text{ folytonos} \Leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{13}$$

$$\mathbf{H}_k-\mathbf{H}_b=\mathbf{n}\times\mathbf{K}_{\text{sz}} \Leftrightarrow H_t \text{ folytonos, ha nincsenek felületi szabad áramok } \Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{j}_{\text{sz}} \tag{14}$$

$$\mathbf{B}_k-\mathbf{B}_b=\mathbf{n}\times\mathbf{K}_{\text{pol}} \tag{15}$$

Ahol az elektrosztatikához hasonlóan a felületi áramsűrűség kiszámítható a mágnesezetttség felületi értékével:

$$\mathbf{K}_{\text{pol}}=(\mathbf{M}_k-\mathbf{M}_b)\times\mathbf{n}\,. \tag{16}$$

II. KÖNYVTÁMASZ ALAKÚ HUROK MÁGNESES DIPÓLMOMENTUMA

Adott az ábrán látható vezető alakzat (hurok), amelynek minden éle w hosszúságú. A hurokban I áram folyik. Határozza meg az áramvonal mágneses dipólmomentumát!

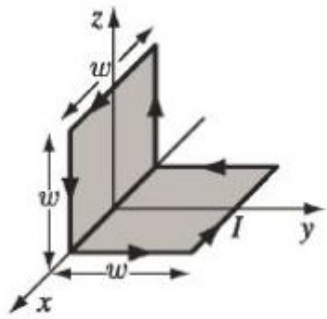

FIG. 1.

Megoldás:
Alkalamzzuk a mágneses dipólusra levzetett formulát egy köráram esetén:

$$\mathbf{m}=\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathbf{j}(\mathbf{r})\times\mathbf{r}=I\oint_{\partial F}\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{r}=I\int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f} \tag{17}$$

Ahol az utolsó esetben tetszőleges felület esetén az infinitezimális felületdarab *vektorokat* is összegeznünk kell! Esetünkben alkalmazzuk a szuperpozíció elvét, amikor is veszünk egy-egy *zárt* xz és xy síkbeli téglalapot, amik területe $w^2/2$ és irányuk $\hat{\mathbf{x}}$, illetve $\hat{\mathbf{z}}$ a kettő elrendzés szuperpozíciójában éppen kiesik x tengelyen folyó áram, ami visszadja az eredeti elrendezést, illetve az egyes darabok mágneses dipolmomentumai az előadáson tanultak alapján egyszerűen csak a felület normálisával párhuzamos irányú és az áram, illetve felület nagyságának szorzatával megegyező hosszúságú vektor, mivel $\oint_{\partial F}\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{r}=\int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}$

$$\mathbf{m}=Iw^2(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{z}}) \tag{18}$$

III. MÁGNESEZETT GÖMB

Adott egy R sugarú gömb. amelyben homogén és állandó $\mathbf{M}=M\hat{\mathbf{z}}$ mágnesezettségű permanens mágneses anyag van (ún.: "gömbmágnes"). Ennek mágneses tere ismert.

A gömbön belül (legyen ez a 2-es tartomány):

$$\mathbf{H}_2=-\frac{1}{3}\mathbf{M},\qquad \mathbf{B}_2=\mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M}. \tag{19}$$

A gömbön kívül (legyen ez az 1-es tartomány) a mágneses skalár potenciál egy $\mathbf{m}=m\hat{\mathbf{z}}$ pontszerű dipólus terével adható meg, azaz

$$\Phi_1(r)=\frac{1}{4\pi}\frac{m\cos\theta}{r^2}. \tag{20}$$

Ahol (r, θ, ϕ) gömbi koordináták. Valamint

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{M}. \tag{21}$$

1. Helyezzük el ezt a gömbmágnest egy $\mathbf{B_0} = \mu_0\mathbf{H_0} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ homogén mágneses térbe úgy, hogy az $\mathbf{M}$ ne változzon meg (permanens mágnesről van szó)! Határozzuk meg az eredő $\mathbf{B}$-t és a $\mathbf{H}$-t a gömb belsejében!

2. Legyen most a gömbmágnes anyaga egy lineárisan mágnesezhető anyag, azaz amelyre igaz, hogy $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$. Az első kérdésre adott válasz ismeretében határozza meg az $\mathbf{M}$ és a $\mathbf{B_0}$ közötti kapcsolatot!
   Megjegyzés: A kapott összefüggés elektroszatikus analógiájával már találkoztunk a Clausius-Mosotti egyenlet tárgyalásakor.

3. Vizsgáljuk meg, hogy a második kérdésben tárgyalt elrendezésnél mi a kapcsolat a gömbmágnes belsejében lévő $\mathbf{B}$ és a $\mathbf{B_0}$ között paramágneses és diamágneses anyag esetén! Vázoljuk fel a mágneses indukcióvonalakat!

4. Adjuk meg a felületi polarizált áramokat és a vektorpotenciált is az első esetben!

Megoldás:

1. Tudjuk, hogy mágneses anyag esetén a következő összefüggés áll fent:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{22}$$

   Esetünkben a teljes mágneses indukció, a mágnesezettségből adódó járulék és a külső tér szuperpozíciójából ered:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0 = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} + \mathbf{B}_0 \tag{23}$$

   Innen, mivel a gömb mágnesezettsége nem változik meg egyszerűen megadható a mágneses térerősség:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M} \tag{24}$$

2. Esetünkben csak ki kell fejezni $\mathbf{B}_0$ és $\mathbf{M}$ kapcsolatát:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\left(\mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} + \mathbf{B}_0\right) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{M} = \frac{3(\mu_r - 1)}{\mu_0(2 + \mu_r)}\mathbf{B}_0 \tag{25}$$

3. Most az előző ősszefüggést $\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}_0$-re írjuk fel:

$$\mathbf{B} = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} + \mathbf{B}_0 = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r}\mathbf{B}_0 \tag{26}$$

   Paramágnes esetén $\mu_r \geq 1$, vagyis $B \geq B_0$, egy erősebb mágneses teret kapunk vissza, míg diamágnes esetén, $\mu_r \leq 1 \Rightarrow B \leq B_0$, gyengébb tér adódik vissza!

4. Használva a tanult összefüggést, $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{M}$, ahol azonban most henger koordinátákban $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$, illetve ekkor $r\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{z} = (\sin\theta\sin\varphi, -\sin\theta\cos\varphi, 0)^T \equiv \rho\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, ahol ez az egységvektor most gömbi koordinátákban értendő, innen egyszerűen

$$\mathbf{K} = M_0\rho\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{27}$$

   A vektorpotenciál pedig belül $r < R$ (ismét szimmetriai megfontolásokból $\mathbf{A} = A_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, de most henger-koordinátákban kifejezve, ami a gömbön belül minden pontban érvényes lesz):

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A\varphi) = \mu_0\frac{2}{3}\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A} = \frac{\mu_0 M_0}{3}\rho\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,, \tag{28}$$

   ahol az integrálás során bejövő konstansokat úgy választottuk meg, hogy nullában eltűnjön a vektorpotenciál.

Kívülről a gömb definíció szerint egy az $\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M}$ által jellemzett mágneses dipólusnak látszódik, aminek a vektorpotenciálja definíció szerint:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 M R^3 \rho}{3r^3}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{29}$$

ahol most $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ "szokásos" gömbi koordinátarendszerbeli sugár, $\mathbf{r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$, illetve $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ a polár sugár és $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ is gömbi koordináta rendszerben értendő! Látható, hogy teljesül a folytonossági feltétel, hiszen ha $r = R$, akkor a külső esetben az érték $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 M_0 \rho}{3}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, ami éppen megegyezik a belsővel a határon!

IV. MÁGNESEZETTT HENGER

Adott egy z irányban végtelen hosszú, R sugarú henger, amelyen belül a mágnesezettség:

$$\mathbf{M} = M_0 \frac{r^2}{R^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

a hengeren kívül a mágnesezettség zérus.

1. Határozza meg a mágnesezettségből a kötött áramsűrűséget mindenhol a térben!
2. Határozza meg a hengeren átfolyó kötött áram nagyságát!
3. Adja meg az integrális Ampere-törvényt a kötött áramra!
4. A kapott egyenlet alapján adja meg a mágneses indukció vektort mindenhol a térben!
5. Határozza meg a vektorpotenciált Coulomb-mértékben mindenhol a térben!

Megoldás:

1. Használjuk a a tanult összefüggést, miszerint

$$\nabla\times\mathbf{M} = \mathbf{j}_{\text{pol}} \tag{30}$$

a mágnesezettség irányából adódóan rögtön látszik, hogy csak $\hat{\mathbf{z}}$ irányú lehet az áram sűrűség, amire pedig a gömbi rotáció alapján a következő adódik:

$$\nabla\times\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{r}\partial_\varphi M_z - \partial_z M_\varphi\right)\hat{\mathbf{r}} + (\partial_z M_r - \partial_r M_z)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{r}(\partial_r(rM_\varphi) - \partial_\varphi M_r)\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{r}\partial_r(rM_\varphi) = \frac{3M_0 r}{R^2}\hat{\mathbf{z}} \tag{31}$$

2. Ekkor az átfolyó áram nagysága, egyszerűen csak a keresztmetszetre vett felületi integrál:

$$I = 2\pi\int_0^R \mathrm{d}r\, M_0\frac{3r^2}{R^2} = 2\pi M_0 R\,. \tag{32}$$

3. Az integrális Ampere törvény alapján $r < R$ esetén:

$$2\pi\int_0^r \mathrm{d}r'\, M_0\frac{3(r')^2}{R^2} = 2\pi M_0\frac{r^3}{R^2} = 2\pi r M_\varphi(r) \to \mathbf{M} = M_0\frac{r^2}{R^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{33}$$

4. Most az polarizált áram ismeretében hasonlóan meg lehet mondani a mángeses indukció vektort, mivel nicsnenek szabadáramok, a következő adódik, illetve hasonló szimmetriai megfontolásokból

$$2\pi\mu_0\int_0^r \mathrm{d}r'\, M_0\frac{3(r')^2}{R^2} = 2\pi\mu_0 M_0\frac{r^3}{R^2} = 2\pi r B_\varphi(r) \to \mathbf{B} = \mu_0 M_0\frac{r^2}{R^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,, \tag{34}$$

ha $r < R$.

A hengeren kívül pedig, egyszerűen visszakapjuk az Ampere törvényből az egyenes vezető terét, viszont itt figyelembe kell vennünk a megjelenő felületi áramokat is, amit az elektrosztatikához hasonlóan a mágnesezettség felületi értékéből adhatunk meg

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}(R) = M_0 \hat{\mathbf{z}}\,, \tag{35}$$

ahonnan az indukcióvektor:

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_0 M_0 R}{r} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{36}$$

5. A vektorpotenciál esetünkben könnyen származtatható az indukcióvektorból, mivel $\nabla \times \mathbf{A} = -\partial_r A_z \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, ahonnan

$$A_z = 2\mu_0 M_0 \ln(r/R)\,, \text{ ha } r > R \tag{37}$$

$$A_z = \mu_0 M_0 \frac{r^3 - R^3}{3R^2}, \text{ ha } r < R \tag{38}$$

ahol második tagban őgy vélaszottuk meg a kosntans eltolást, hogy a határon folytonos maradjon a vektorpotenciál.

A vektorpotenciál divergenciája:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_z A_z = 0\,, \tag{39}$$

vagyis Coulomb mértékben vagyunk.

V. SÍKLAP ÉS DIPÓLUS

Egy $2a$ vastagságú síklapban $\mathbf{J} = J_0 \hat{\mathbf{z}}$ áram folyik. A síklapot felezi az yz sík, azaz $x = -a$ és $x = a$ síkok között van. Egy mágneses dipólus $\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{x}}$ van az origóban.

1. Határozza meg a dipólusra ható erőt!
2. Határozza meg a dipólusra ható erőt, ha a dipólmomentum $\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{y}}$!
3. Az elektrosztatikus esetben $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ és $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ ekvivalensek, de ez nem igaz a mágneses analógjukra. Miért? Számolja ki a $(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ kifejezést a fenti két esetre!

Megoldás:

1. Először az indukció vektort határozzuk meg! Tudjuk, hogy egy x-re, merőleges síkban, $x = a$-ban átfolyó felületi áramsűrűség által keltett tér $\sim \mathbf{B} = \mu_0 K \mathrm{sgn}(x - a)\ \hat{\mathbf{y}}$, ahol $\mathbf{K} = k\hat{\mathbf{z}} \equiv J_0 \mathrm{d}x\, \hat{\mathbf{z}}$. Ezeket felösszegezve egyszerűen a síkon kívüli tér:

$$\mathbf{B}_k = \mu_0 J_0 a \mathrm{sgn}(z)\ \hat{\mathbf{y}}, \text{ ha } |x| \geq a \tag{40}$$

Míg a belső tér hasonló módon számolható, ki de figyelembe kell vennünk, hogy egy adott x pontban a két oldalon folyó áramok ellentétes irányú teret keltenek, vagyis ekkor összesen egy $2x$ magasságú térfogat tartomány fogja jelenteni a különbséget:

$$\mathbf{B}_b = \mu_0 J_0 x\, \hat{\mathbf{y}} \tag{41}$$

Most kiszámoljuk ez alapján és az előadáson levezetett formula segítségével az origóba helyezett $\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{y}}$ dipólusra ható erőt:

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_b) \Rightarrow F_i = m_k \partial_i (B_b)_k \Big|_{\mathbf{r}=0} = m_k \mu_0 J_0 \delta_{k,2} \delta_{i,2} = 0 \tag{42}$$

mivel $\mathbf{m}$-nek csak x irányú komponense van, $m_k = \delta_{k,1} m_0$.

2. $\mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}}$ irányú dipólus esetén triviálisan

$$F_i = m_k\mu_0 J_0 \delta_{k,2}\delta_{i,2} = m_0\mu_0 J_0 \delta_{i,2} \Rightarrow \mathbf{F} = m_0\mu_0 J_0\,\hat{\mathbf{x}} \tag{43}$$

3. Elektrosztatikában egy töltéseloszlásra ható erő általános kifejezéséből kiindulva a következő módon tudjuk megadni az oriban lévő dipólusra ható erőt egy tetszőleges külső tért esetén

$$F_i = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,E_i(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})(E_i(0) + r_l\partial_l E_i(0)) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, = QE_0(0) + (\mathbf{p}\nabla)\,E_i(0) \tag{44}$$

A feladatban kiírt egyenlőség a következő módon látható be:

$$p_l(\partial_l E_i - \partial_i E_l) = p_l\varepsilon_{lik}(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_k = 0 \tag{45}$$

mivel az elektromos tér rotáció mentes, vagyis $p_l\partial_l E_i = p_l\partial_i E_l \Leftrightarrow (\mathbf{p}\nabla)\,\mathbf{E} = \nabla(\mathbf{pE})$. Látható, hogy ha elvetjük a rotációmentességet, akkor a fenti állítás nem lesz igaz! Vagyis magnetosztatika esetén nem igaz, hogy $(\mathbf{m}\nabla)\,\mathbf{B} = \nabla(\mathbf{mB})$, ahol ismét felírhatjuk a dipólusra ható erőt egy általános árameloszlásból származtatva tetszőleges külső elektromos tér esetén:

$$F_i = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \cdots = \partial_i m_l B_l \equiv \partial_i(\mathbf{mB}) \tag{46}$$

illetve a fentebbi érvelés valóban nem állja meg a helyét, mivel

$$m_l(\partial_l B_i - \partial_i B_l) = m_l\varepsilon_{lik}(\mathrm{rot}\,\mathbf{B})_k = \mu_0 m_l\varepsilon_{lik}J_k \Leftrightarrow (\mathbf{m}\nabla)\,\mathbf{B} - \nabla(\mathbf{mB}) = \mu_0\,\mathbf{J}\times\mathbf{m} \tag{47}$$

A mi esetünkben a két dipólus irányra:

$$(\mathbf{m}\nabla)\,\mathbf{B} = \begin{cases} m_0\partial_x\mu_0 J_0 x\hat{\mathbf{y}} = m_0\mu_0 J_0\hat{\mathbf{y}},\ \mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{x}} \\ m_0\partial_y\mu_0 J_0 x\hat{\mathbf{y}} = 0,\ \mathbf{m} = m_0\hat{\mathbf{y}} \end{cases} \tag{48}$$

Láthatóan éppen fordított módon kapjuk meg az eredményeket!

VI. DIAMÁGNESESSÉG NAÍV MODELLJE

Vegyük egy elektron pályáját az atommag körül körpályának. Az elektront magát vegyük egy köráramnak:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}, \tag{49}$$

azaz a pályához rendelhető dipólmomentum

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{\mathbf{z}}. \tag{50}$$

A keringő elektronra hat az atommag vonzereje, azaz

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e\frac{v^2}{R}. \tag{51}$$

Ha az anyagot mágneses térbe helyezzük, egy további erő, a Lorentz erő is hat az elektronra, így

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\tilde{v}B = m_e\frac{\tilde{v}^2}{R}, \tag{52}$$

ahol $\tilde{v}$ a mágneses erő hatására módosult sebesség.

1. Mutassa meg, hogy ha $\Delta v = \tilde{v} - v$, akkor

$$\Delta v = \frac{eRB}{2m_e}. \tag{53}$$

Írja fel a dipólmomentum változását ($\mathbf{\Delta m}$) is, a mágneses tér ($\mathbf{B}$) függvényében!

2. A fenti modell alapján adjon egy becslést a réz szuszceptibilitására (χ_m)! A mért érték $\chi_m = -9.7 \times 10^{-6}$, *Handbook of Chemistry and Physics*, 67th ed. (Boca Raton: CRC Press, Inc., 1986).

Megoldás:

1. Elektronok körárama, mint klasszikus részecskék körmozgása, $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R}$, amihez $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{\mathbf{z}}$, míg a keringő elektronra ható vonzóerő az atommag által $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} = m_e\frac{v^2}{R}$, amihez még a Lorentz erő is társulhat, összességében a következőt adva:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R^2} + e\tilde{v}B = m_e\frac{\tilde{v}^2}{R} \tag{54}$$

A mágneses tér nélküli sebesség könnyedén megadható $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R m_e}}$, míg $\tilde{v}$ a következőképpen adható meg egy másodfokú egyenlet megoldásaként:

$$\tilde{v} = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2 + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R m_e}} \approx \frac{eBR}{2m_e} + \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R m_e}}, \tag{55}$$

ahonnan $\Delta v \approx \frac{eRB}{2m_e} \Rightarrow \Delta\mathbf{m} = -\frac{1}{2}e\Delta vR\hat{\mathbf{z}} = -\frac{e^2BR^2}{4m_e}\hat{\mathbf{z}}$.

2. Ehhez szükségünk van a réz anyagsűrűségére, ami $\mathcal{N} \approx 10^{30}\ 1/m^3$, ahonnan $\Delta\mathbf{M} = \mathcal{N}\mathbf{m} \Rightarrow \chi_m \sim \mu_0\mathcal{N}\Delta\mathbf{m} \sim \mu_0\mathcal{N}\frac{e^2R^2}{m_e}$, ahol $R \sim 1,35\,10^{-10} \Rightarrow \chi_m \sim 5 \times 10^{-6}$.