Példák: Magnetosztatikai alapok

Megjegyzés: az összes konkrétan kiszámolt vektorpotenciálról és mágneses mezőről érdemes rajzot készíteni!

I. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

- Biot-savart törvény

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{1}$$

Kihasználva, hogy $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$, illetve, hogy tetszőleges $f(\mathbf{r})$ esetén $(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla f(\mathbf{r}))_i = \varepsilon_{ikl} j_k \partial_l f = -\varepsilon_{ilk}\partial_l(\mathbf{j} \cdot f)_k = -\nabla \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot f(\mathbf{r}))$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2}$$

Előadáson tanultakból ilyenkor rögtön következik, hogy $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Azonban, mivel az egyetlen dolog, ami fizikai tartalommal bír a $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}$, ezt azonban nem csak a fenti vektorpotenciál elégíti ki, mivel tetszőleges χ skalártér esetén $\nabla \times (\nabla\chi) = 0$, azaz mindig élhetünk egy *mértékszabadsággal*

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi \, . \tag{3}$$

A Biot-Savart törvényből levezetett képlet fontos további tulajdonsága, hogy $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, illetve $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Továbbá a vektorpotenciál fenti speciális alakjából rögtön látható, hogy

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, . \tag{4}$$

Azaz, "úgy viselkedik mint a Laplace-egyenlet, csak vektoros alakban"

- Fordított irányból vizsgálva a mágneses teret a következőt mondhatjuk: feltesszük, hogy tudjuk $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ és $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, amiből rögtön következik, hogy kereshető

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5}$$

alakban. Azonban ebből még korántsem következik, hogy $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, csupán ismét azt tudjuk, hogy tetszőleges $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ teljesíti a megkövetelt összefüggést. Coulomb mértéknek nevezzük, amikor teljesül a $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ összefüggés. Ekkor felhasználva a szintén előre ismert $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \Rightarrow \Delta\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \tag{6}$$

amely Poisson egyenlet partikuláris megoldását egyszerűen meg tudjuk adni

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, . \tag{7}$$

Vegyük észre, hogy a mértékszabadság alakja az elektromos skalár potenciál esetén jóval korlátozotabb volt, mivel ott csa kegy kosntans elotlás erejéig kaptuk vissza ugyanaza fizikai mennyiséget és így mindig érvényes volt az analóg módon megadott alakja a partikuláris megoldásnak, $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ és $\Phi'(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \Phi_0$

- Biot-Savart törvény egyenes vezető esetén, $\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathrm{d}\mathbf{r}' I$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \mathrm{d}\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \tag{8}$$

II. A VEKTORPOTENCIÁL REKONSTRUKCIÓJA

Vegyük észre a formális analógiát a magnetosztatika Maxwell-egyenletei

$$\text{rot}\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad \text{div}\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \tag{9}$$

és a vektorpotenciálra Coulomb-mértékben érvényes összefüggések:

$$\text{rot}\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \qquad \text{div}\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \tag{10}$$

között!

1. Írja fel a Biot-Savart törvény analógját arra, hogyan lehet a vektorpotenciált előállítani a mágneses mező ismeretében!

   Megoldás:
   Tudjuk, hogy egy $\mathrm{d}\mathbf{r}'$ infinitezimális nagyságú szakaszban átfolyó áram a következő mágneses teret kelti:

   $$\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\,, \tag{11}$$

   amit, ha úgy írunk fel, hogy a szakasz darab árama egy $\mathrm{d}A'$ felületen átfolyó $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ felületi áramsűrűségből ered és összegzünk a vizsgált elrendezés minden szakasz darabjára, a következőt kapjuk:

   $$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\,. \tag{12}$$

   Ezzel analóg módon adható meg a vektorpotenciál, ahol csak le kell cserélnünk a $\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ tagot $\mathbf{B}(\mathbf{r})$-re:

   $$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \mathrm{d}^3\mathbf{r}'' \, \frac{(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^3}\,. \tag{13}$$

   Vegyük észre, hogy ha fenti egyenletbe beírjuk $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ integrális alakját, akkor a

2. Mi az Ampere-féle gerjesztési törvény megfelelője?
   Megoldás:
   Az Ampere-törvény az integrális alakja a Biot-Savart törvénynek:

   $$\text{rot}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\text{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mu_0 I\,. \tag{14}$$

   Ismét lecserélve a $\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ tagot $\mathbf{B}(\mathbf{r})$-re a következő analóg kifejezést kapjuk:

   $$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{B}(\mathbf{r})\,. \tag{15}$$

III. VÉGTELEN HOSSZÚ SZOLENOID ÉS TOROID

Adott egy R sugarú, kör keresztmetszetű szolenoid, melynek tengelye a z koordinátatengely. A végtelen hosszúnak vehető tekercs belsejében a mágneses térerősség ismert és homogénnek tekinthető, az egységnyi hosszra eső menetszáma pedig n.

1. Mennyi a mágneses indukció a tekercs belsejében és azon kívül?
2. Határozza meg a vektorpotenciált a tekercsen belül és kívül! Készítsen ábrát a mágneses mezőről és a vektorpotenciálról!
3. Számolja ki a vektorpotenciál rotációját a tekercsen belül és kívül! Értelmezze az eredményt!
4. Tegyük fel, hogy a szolenoid keresztmetszete nem kör alakú! Mutassa meg, hogy a mágneses tér a mágneses tér egy végtelen hosszú szolenoidon belül a tengellyel párhuzamos, a keresztmetszet alakjától függetlenül. Mekkora a tér nagysága kivül, illetve belül?

5. Határozza meg egy toroid tekercs (zárt kör alakba hajlított szolenoid) mágneses terét! Homogén-e ez a mező?

Megoldás:

1. A mágneses tér a mi közelítésünkben állandónak és z irányúnak vehető, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B\hat{\mathbf{z}}$. Ekkor használjuk az Ampere-törvényt a tér nagyságának meghatározásához, amihez tekintsük azt a γ zárt görbét, ami párhuzamos a z tengellyel és a merőlegesen folytatódik a tekercsen kívül, majd a másik párhuzamos része nagyon messze van a tekercstől, annak érdekében, hogy a tekercsen kívüli részein nullának vehessük jó közelítéssel a mágneses teret:

$$\oint_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = LB = \mu_0 LnI \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 nI\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{16}$$

A tekercsen kívüli teret pedig egy olyan γ görbére való vonalintegrállal adhatjuk meg, ahol a görbe egy $r > R$ sugarú koncentrikus kör és merőleges a z tengelyre. Ekkor az átfolyó áram egyszerűen csak a tekercsen végig folyó I árammal egyenlő:

$$\oint_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{17}$$

ahol $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, illetve a rendszer szimmetriája miatt feltehettük, hogy ekkor $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \parallel \hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

2. A vektorpotenciálhoz alkalmazzuk az Ampere-törvény analógját a tekercsen belül egy $r < R$ sugarú körre:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 2\pi r A_\varphi = \pi r^2 B \Rightarrow A_\varphi = \frac{rB}{2} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 nIr}{2}\hat{\boldsymbol{\varphi}},\ \text{ha } r < R, \tag{18}$$

illetve ki kell számítanunk ehhez még a tekercsen kívüli $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ irányú térből eredő vektorpotenciált is, nevezzük ez utóbbit $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$-nek, ami azonban a terkecsen belül független r-től és csak egy konstans eltolást okoz a vektorpotenciálban, amit rögzít a folytonossági határfeltétel. Ez onnan látható, hogy ismét véve a korábban a mángeses indukció vektornál használt görbét annak a tekerccsel párhuzamos r-nél lévő rész ad járulékot, azonban a tekercsen belül a körül ölelt mágneses fluxus nem ad járulékot, így nem függ attól, hogy milyen $r < R$-nél helyezkedik el a görbe párhuzamos része.

A tekercsen kívül, $r > R$ esetén figyelembe kell vennünk mind a tekecs teljes $\pi R^2 B$ fluxusát, ami ad egy $\frac{\mu_0 nIR^2}{2r}\hat{\mathbf{z}}$ járulékot, a z irányú tagban, mind a mostmár r függő járulékot, ami a B_φ-ből adódik

$$\oint_{\partial F} \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = LA_z = \int_F \mathrm{d}^2\mathbf{f}'\,\mathbf{B}(\mathbf{r}') = L\int_r^\infty \mathrm{d}r'\,B_\varphi = L\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\Big(\frac{r}{R}\Big) \Rightarrow A_z(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\Big(\frac{r}{R}\Big)\,. \tag{19}$$

ahol a logaritmusban lévő konstanst úgy választottuk meg, hogy a vektorpotenciál z komponense folytonosan tűnjön el az $r = R$-ben:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\Big(\frac{r}{R}\Big)\hat{\mathbf{z}} + \frac{\mu_0 nIR^2}{2r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{20}$$

3. A rotáció számoláshoz használjuk a rotáció henger koordináta rendszerbeli alakjával:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\rho}\partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi\right)\hat{\rho} + (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z)\,\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}(\partial_\rho(\rho A_\varphi) - \partial_\varphi A_\rho)\,\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{21}$$

A tekercs belsejében csak A_φ komponensünk van, ami csak r-től függ, azaz a rotációból csak az $\frac{1}{r}\partial_r(rA_\varphi) = \mu_0 nI$ tag fog megmaradni, ami z irányú és így helyesen visszkaptuk a mágneses teret belül! Most a külső tartományban az $\frac{1}{r}\partial_r(rA_\varphi) = 0$ helyesen zérust ad, míg a $-\partial_r A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, ami a rotáció képlete alapján $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ irányú, ami egyezik a korábban kapott mágneses térrel.

4. Nem kör keresztmetszetű, de végtelen hosszú szolenoid esetén az Ampere törvényt ugyanarra a γ görbére felírva, mint a köralakúnál ugyanazok a közelítések működnek. Ugyanígy a szolenoidon kívül az Ampere-törvényben csak az $r > R$, ahol most R a szolenoid maximális szélessége, kör által körbezárt áramot kell tekinteni.

5. Toroid tekercs esetén, aminek a belső sugara a, ha $r \ll a$ visszakapjuk a sima I áramú körvezető esetét, ahol egy $R\mathrm{d}\varphi\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ irányű szakasz árama a kör középpontjában

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R} \tag{22}$$

infinitezimális z irányú járulékot ad, amit he felösszegzünk a szög szernt a teljes eredmény:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{23}$$

Szintén az $a \gg R$ határesetben a toroid belsejében egyszerűen egy $a < r < a + R$ sugarú körre írjuk fel az Ampere-törvényt, ami a következőt adja:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2\pi r B = 2\pi a n \mu_0 I \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I n a}{r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{24}$$

Az $R \ll a$ határeset egyben ekkor azt is indikálja, hogy a toroidon kívül, $r > a+R$ nincs mágneses terünk, mivel a toroidban egymással ellentétesen folyó áramok az $a \ll R$ feltétel miatt "nagyon közel vannak egymáshoz", így minden a nagyságrendű pontban a járulékuk jó közelítéssel kiejtik egymást!

IV. EGYENES ÁRAMVONAL

Adott a z-tengely mentén egy végtelen hosszú egyenes I áramvonal.

1. Írja fel a vektorpotenciál integrálkifejezését és számítsa ki az eredményt! (Segítség: érdemes észrevenni a vonaltöltéssel való analógiát!)

2. Határozza meg a vektorpotenciál ismeretében a mágneses indukciót!

Megoldás:
A vektorpotenciál kifejezhető az elektromos potenciállal analóg módon Coulomb mértékben, $\nabla\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$, a következő módon:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{25}$$

Esetünkben $\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') = I\,\mathrm{d}\mathbf{r}' = I\mathrm{d}z\,\hat{\mathbf{z}}$, ahonnan az integrál a vonaltól r távolságra a következő alakot ölti:

$$A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathrm{ash}(z)\Big|_{-\infty}^{\infty}\,. \tag{26}$$

Látható módon ez az integrál nem függ r-től, illetve a két határértékben az eredmény végtelen, ami egy teljesen téves eredmény, mivel tudjuk, hogy ennek a vektorpotenciálnak a rotációja egy nem zérus és véges mágneses teret kell, hogy adjon! A hiba onnan ered, hogy a vonal végtelensége miatt bejöhettek végtelen nagy konstansok a kifejezésbe, amik "elfedték" a valós r függést!
Vegyünk egy $2L$ hosszúságú vonalvezetőt, ahol most az integrál a következő alakot ölti, amikor r távolságra és z magasságban akarjuk megadni a vektorpotenciál értékét (az általánosság megcsorbítása nélkül elegendő csak a $z = 0$-ban vizsgálni a problémát):

$$\begin{aligned} A_z(r) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}z'\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-(L-z)/r}^{(L-z)/r}\mathrm{d}z'\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\mathrm{ash}((L-z)/r) - (\mathrm{ash}(-(L-z)/r))\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left((L-z)/r + \sqrt{(L-z)^2/r^2+1}\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\ln((L-z)/r) + \ln\left(1+\sqrt{1+r^2/(L-z)^2}\right)\right) \approx -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(L/r)\ , \end{aligned} \tag{27}$$

ahol az utolsó lépésben az $L - z \approx L$ közelítéssel éltünk, illetve ahol az utolsó tag valóban, bár tartalmaz r függést, eltűnik, ahogyan $L \to \infty$, továbbá az első tag tartalmaz egy végtelen konstanst, amit azonban elhagyhatunk, hiszen úgy is kinullázódna a rotáció képzés után. Ekkor láthatóan teljesülni fog a vektorpotenciál és a mágneses tér közötti

öszefüggés, hiszen esetünkben, amikor csak az $A_z(r)$ komponens nem zérus, $\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\partial_r A_z \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\partial_r \ln(r/L)\,\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{\varphi} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.
Teljesen analóg eset tárul elénk a vonal töltés esetén, ha exlicit integrálással akarjuk meghatározni, csupán a $\frac{\mu_0 I}{4\pi} \leftrightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}$ megfeleltetéssel kell élnünk, ahol λ a homogén vonaltöltés sűrűség. Azonban a végtelen konstansok elhagyása a elektromos potenciál esetén is megengedett lépés, tehát minden ugyanúgy működik mint fentebb a vektorpotenciál esetén.

V. KÖRALAKÚ ÁRAMHUROK TERE A TENGELYE MENTÉN

Adott az xy-síkban egy R sugarú, köralakú áramhurok, amelyben I áram folyik. A kör középpontja az origóban van. Határozza meg a vektorpotenciált és a mágneses indukciót a z tengely mentén!

Megoldás:
Használjuk ismét a vektorpotenciálra a korábban levezetett integrál kifejezést, ahol most $\mathrm{d}^3\mathbf{r}'\,\mathbf{j}(\mathbf{r}') = IR\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, illetve a z tengely mentén $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{z^2+R^2}$:

$$\mathbf{A}(z) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0 \tag{28}$$

mivel $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$. Ebből lazonban még nem tudjuk származtatni a mágneses indukcióvektort, mivel, hogy mindhárom változó szerint tudjuk képezni a rotációban a vektorpotenciál parciális deriváltjati, ahhoz ismernünk kellene mind az r, mind a φ függését (vagy legalább is a $\mathrm{d}r$ értéknél, ha a derivátlakat $r=0$-nál akarjuk kiszámolni). A korrekt eredményhez ki kell számolnunk explicit integrálással a mágneses teret, ahol ismét $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{R^2+z^2}$, illetve $\mathbf{r}-\mathbf{r}' = z\,\hat{\mathbf{z}} - R\,\hat{\mathbf{r}}$, ahonnan a Biot-savart törvény a következőt adja a z tengely mentén:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}\times(z\,\hat{\mathbf{z}}-R\,\hat{\mathbf{r}})}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\frac{\mu_0 IRz}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} \tag{29}$$

Láthatóan kaptunk az integrál kifejezésen belül egy látszólag $\hat{\mathbf{r}} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ irányú tagot is, ami azonban $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi(\cos\varphi,\sin\varphi,0) = 0$ módon nullára integrálódik, illetve kaptunk még egy extra járulékot, amit a vektorpotenciálból csak akkor kaphattunk volna meg, ha figyelembe vesszük annak tetszőleges r függését is.

VI. VÉGTELEN SÍKLAP EGYENLETES FELÜLETI ÁRAMSŰRŰSÉGGEL

Adott egy végtelen kiterjedésű, vezető síklap az xy-síkban. A vezető lapon x irányban állandó nagyságú K felületi áramsűrűség folyik. Határozza meg a $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ mágneses indukciót mindenhol a térben!

Megoldás:
Legfontosabb megfigyelés a rendszer x,y-bel kétdimenziós eltolási invarianciája alapján, hogy a tér nem függhet x,y-tól! Illetve, mivel az áram végtelen nagy kiterjedésű a mágneses tér a z változótól sem függhet, mivel mindegy milyen messze vagyunk a síktól, mindig ugyanazok lesznek az áramok járulékai adott pontban. Továbbá azon felül, hogy a Biot-Savart törvény alapján a mágneses térnek nem lehet x irányú komponense, az is világos, hogy z irányú sem lehet, mivel bármely pontban a ponttól jobbra és balra lévő térrész áramai éppen ellentétes z irányú komponenseket adnak! Ezen felül az alsó és felső féltérben is ugyankkora lesz a tér nagysága, de ellentétes irányban fognak mutatni. Tehát $\mathbf{B} = -B\operatorname{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{y}}$, illetve a z függetlenség miatt elég egy tetszőleges l hosszú h magas téglalap alakú görbén alkalmazni az Ampere-törvényt az $z>0$ térrészben

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{B} = 2lB = \mu_0 lK \Rightarrow \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 K}{2}\hat{\mathbf{y}}\,. \tag{30}$$

Míg a $z<0$ térrészben az ellentétes körüljárás miatt a fenti eredmény (-1)-szeresét kapjuk, amivel kifejezhető a teljes megoldás:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 K}{2}\operatorname{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{y}}\,. \tag{31}$$

Explicit integrálással is eljuthatunk ehhez az eredményhez, vegyünk $y > 0$ esetén egy $\mathrm{d}y$ vastagású szakaszt, amin az átfolyó áram ekkor $\mathrm{d}I = K\mathrm{d}y$. Ekkor az általa keltett mágneses tér nagysága az $y = 0, z$ magasságban a vonalvezetőre levezetett formula alapján, ami a rendszer 2 dimenziós transzlációs invariánciája miatt egy tetszőleges pont a térben:

$$\mathrm{d}B = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{K\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+z^2}}\,. \tag{32}$$

Ekkor azonban figyelembe véve a hasonló nagyságú $y < 0$ infinitezimális szakaszdarabból eredő járulékot a térnek csak y irányú komponense marad, amihez vennünk kell az $y, z = 0$ és a $y = 0, z$ pontot összekötő szakasz és az y tengely által bezárt szög szinuszát, $\sin\varphi = \frac{|z|}{\sqrt{y^2+z^2}}$, ahonnan az infinitezimális y irányú komponens:

$$\mathrm{d}B_y = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{K|z|}{y^2+z^2}\mathrm{d}y\,, \tag{33}$$

ahol egy 2-es faktorral vettük figyelembe, hogy ugyanolyan járulék adódik mind az $y > 0$, mind az $y < 0$ tartományokból. Innen a következő integrállal kapjuk meg a mágneses tér y komponensét:

$$B_y(z) = -\frac{\mu_0}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}y\frac{K|z|}{y^2+z^2} = -\frac{\mu_0}{\pi}\frac{\mathrm{sgn}(z)}{z}z\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{z}\right)\Big|_0^\infty = -\frac{\mu_0 K}{2}\mathrm{sgn}(z)\,. \tag{34}$$