Példák: Tükörtöltés módszer, Laplace egyenlet

I. PONTTÖLTÉS FÖLDELT VEZETŐ KÖZELÉBEN

A z-tengelyen két pont töltés helyezkedik el, q nagyságú $z = 3d$ pontban, $-2q$ nagyságú pedig a $z = d$ pontban. Az xy-sík alatti ($z < 0$) teret homogén földelt vezető tölti ki. Mekkora erő hat a q töltésre?
Megoldás:
A homogén földelt vezetőben a töltéselrendeződés úgy fog módosulni, illetve annyi extra töltést fog felszívni a "földből", hogy a fémfelület ekvipotenciális legyen, azaz a felszínen zérus legyen az elektromos tér tangenciális komponense, precízen megfogalmazva:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

mivel x és y felelnek meg a tangenciális iránynak. Ezt a tükörtöltések módszerével tudjuk kvantifikálni, vagyis felhasználjuk az elektrosztatika egyértelműségét, azaz adott határfeltétel mellett a $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Poisson egyenlet megoldása egy konstans eltolás erejéig egyértelmű! Tehát mindegy milyen elrendezéssel realizálódik a rendszer, amíg ugyanazok a határfeltételek vannak érvényben, az eredmény változatlan marad, míg a konstans eltolást mindig úgy határozzuk meg, hogy azzal a potenciál folytonos maradjon! Ennek megfelelően a földelt fém által meghatározott határfeltételt próbáljuk meg kielégíteni úgy, hogy a fémet helyettesítjük két ponttöltéssel, melyek olyan erővonalképet hoznak létre, amik teljesítik a "merőlegességi feltételt" a $z = 0$ síkon!
Ehhez vegyünk éppen $z = -d$ és $z = -3d$-ben ellentétes nagyságú töltéseket, melyek a következő potenciált keltik tetszőleges z esetén és $r^2 = x^2 + y^2$ jelölést alkalmazva:

$$\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-3d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+3d)^2}} - \frac{2}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{2}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}}\right) \tag{2}$$

Látható, hogy tetszőleges tangenciális irány kiszámítható a $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ módon, ami csak a fémfelületen lesz nulla, igazolva a helyettesítő kép érvényességét.
Ekkor a q töltésre 3 másik töltés ereje hat:

$$F_q = kq^2\left(\frac{-2}{4d^2} + \frac{2}{16d^2} - \frac{1}{36d^2}\right) = \frac{-58kq^2}{144d^2} \tag{3}$$

II. TÖLTÉS FÖLDELT FÉMGÖMB KÖZELÉBEN

q nagyságú ponttöltés egy földelt R sugarú fémgömb középpontjától a távolságra van, ahol $a > R$.

1. Számolja ki a potenciált a gömbön kívül!
   Megoldás:
   Ismét alkalmazzuk azon elvet, hogy a gömb felületén érvényes határfeltételt kielégíthetjük egy megfelelően elhelyezett tükörtöltéssel is, ehhez vegyünk a' távolságra egy q' nagyságú tükörtöltést a gömbön belül $a' < R$, ekkor a potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = k\left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (a')^2 - 2ra'\cos\theta}}\right) \tag{4}$$

   Ekkor az ekvipotencialitás kielégülése pont az jelenti, hogy $\Phi(R, \theta) = \text{áll.} = 0$, vagyis nem függ a θ szögtől és legkényelmesebb módon 0-nak választottuk meg! Ekkor a feltétel alpján:

$$\sqrt{\frac{R^2 + (a')^2 - 2Ra'\cos\theta}{R^2 + a^2 - 2Ra'\cos\theta}} = \frac{q'}{q} = \text{const} \tag{5}$$

   mivel minden θ-ra igaznak kell lennie, az érték csak egy θ független konstans lehet! Ekkor válasszunk $\theta = \pi$-t és $\theta = 0$-át, amihez a követlező konstans értékek tartoznak:

$$\frac{R - a'}{a - R} = \frac{R + a'}{R + a} \to -2aa' = -2R^2 \to a' = \frac{R^2}{a}, \tag{6}$$

ahonnan a ponttöltés értéke $\theta = \pi$-nél számolva:

$$q' = -q\frac{R+a'}{R+a} = -\frac{R}{a}q \tag{7}$$

Ezekkel az értékekkel a potenciál a tér egy tetszőleges pontjában:

$$\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - \frac{R}{\sqrt{a^2r^2+R^4-2raR^2\cos\theta}}\right) \tag{8}$$

2. Számolja ki a gömbön indukált felületi töltéssűrűséget a gömbi θ-szög függvényében. Integrálja ki ezt a kifejezést, azaz, számolja ki a teljes, a gömb felületén, indukált töltést! (Útmutatás: az integrál értékét explicit számolás nélkül is meg lehet mondani Maxwell törvényei alapján!)
Megoldás:
Alkalmazzuk az integrális Gauss-tételt egy infinitezimális $\mathrm{d}A$ felületű $h \ll R$ magasságú téglatestre a gömb felszínén, ami így szükségszerűen körbe ölel $\sigma\mathrm{d}A$ nagyságú töltést:

$$\begin{aligned} E\mathrm{d}A &= \frac{\sigma\mathrm{d}A}{\varepsilon_0} \to \sigma = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=R} \\ \sigma &= -\frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}} - \frac{R}{\sqrt{a^2r^2+R^4-2raR^2\cos\theta}}\right)\bigg|_{r=R} \\ &= \frac{q}{4\pi}\left(\frac{r-a\cos\theta}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a^2/R-a\cos\theta}{(a^2+R-2aR\cos\theta)^{3/2}}\right) = \frac{q}{4\pi}\frac{R-a^2/R}{(a^2+R^2-2aR\cos\theta)^{3/2}} \end{aligned} \tag{9}$$

3. Mi a különbség, ha a gömb nem földelt, hanem izolált?
Megoldás:
Ha a gömb izolált az eredményünket ki kell egészíteni egy az origóba rakott $-q'$ nagyságú töltéssel, hogy az össztöltés és a határfeltétel is érvényben maradjon! Tehát minden korábbi egyenletünkhöz hozzá kell vennünk egy origóbeli $\frac{R}{a}q$ nagyságú ponttölés hatását:

$$\Phi_{\text{izolált}} = \Phi(\mathbf{r}) + \frac{kRq}{ar} \tag{10}$$

$$\sigma_{\text{izolált}} = \sigma + \frac{q}{4\pi Ra} \tag{11}$$

III. TÖLTÉS EGY DERÉKSZÖGŰ ÜREGBEN

A tér egy részét földelt vezető tölti ki, a következőképen. A z-tengellyel párhuzamosan nézve, tetszőleges z-nél az xy sík pozitív negyede üres, viszont az összes többi negyedet kitölti a vezető anyag. Az anyagot határoló két síkfelület az xz és az yz tengelyeken találhatók, derékszögben találkoznak egymással. A z-tengelyen haladva a rendszer szimmetrikus (transzlációs szimmetria), azaz, az elrendezés változatlan a z-tengely mentén.

Az xy síkra, $z = 0$-ban az $(a, b, 0)$ pontban egy q nagyságú ponttöltést helyezünk el.

1. Számolja ki a potenciált az xy sík pozitív negyedében!
Megoldás:
Ekkor először is biztosítanunk kell, hogy mind az $y > 0$ tengely mentén, mind az $x > 0$ tengely mentén kielégüljön a feltétel, miszerint ekvpotenciálisnak kell lennie ezen felületeknek, vagyis vennünk kell egy $-q$ tükörtöltést a $(a, -b, 0)$ és a $(-a, b, 0)$ pontokban, ekkor azonban a $-b$-nél lévő töltés elrontja a határfeltételt az $x > 0$ tengely mentén és fordítva a $-a$-ban évő töltés elrontja a határfeltételt az $y > 0$ tengely mentén! a megoldást az jelenit, ha bevezetünk még egy, q nagyságú, tükörttöltést a $(-a, -b, 0)$ pontban, ami által két-két töltés pár ekvipotenciálissá teszi mind az x, mind az y tengelyeket! Ekkor a potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = kq\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}}\right) \tag{12}$$

2. Mekkora erő hat a q töltésre?
Megoldás:
A két $-q$ töltés által ható erők mergőlegesek egymásra, míg a harmadik az első kettő eredőjével párhuzamosan mutat:

$$\mathbf{F}_x = -\frac{kq^2}{4a^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{13}$$

$$\mathbf{F}_y = -\frac{kq^2}{4b^2}\hat{\mathbf{y}} \tag{14}$$

$$\mathbf{F}_{\text{átlós}} = \frac{kq^2}{4(a^2+b^2)}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\mathbf{x}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\hat{\mathbf{y}}\right) \tag{15}$$

Ahonnan az eredő erő:

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{4}\left(\left(\frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2)}} - \frac{1}{a^2}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2)}} - \frac{1}{b^2}\right)\hat{\mathbf{y}}\right) \tag{16}$$

3. Mekkora munka kell ahhoz, hogy a q töltést a végtelenből az $(a, b, 0)$ pontra helyezzük?
Megoldás:
Ezt legegyszerűbben úgy adhatjuk meg, ha a töltést először végig az $\hat{\mathbf{x}}$ vektorral párhuzamosan mozgatjuk, majd az $\hat{\mathbf{y}}$-al párhuzamosan hozzuk be a kívánt pontba

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{kq^2}{4}\left(-\int_a^\infty \mathrm{d}x\,\frac{1}{x^2} + \int_b^\infty \mathrm{d}y\left(-\frac{1}{y^2} + \frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\right)\right) = \frac{kq^2}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{17}$$

IV. VEZETŐ GÖMB KONSTANS ELEKTROMOS TÉRBEN

Az R sugarú földelt vezető gömb konstans elektromos térben problémája is megoldható a tükörtöltés módszerrel. Legyen a gömb középpontja az origó. Helyezzünk egy $-q$ töltést a z tengelyre az origótól $a > R$ távolságban, valamint egy $+q$ töltést a $z = -a$ pontra. A gömbön kívüli tér meghatározható, mint a két eredeti töltés, és a két tükörtöltés tere. Ahhoz hogy konstans teret hozzunk létre a gömb körüli tartományban, a két eredeti töltéssel a végtelenbe kell tartani (a $-q$-val a $+\infty$-be, a $+q$-val a $-\infty$-be), úgy hogy közben q/a^2 konstans.

Határozza meg a gömbön kívüli potenciált és elektromos teret, ha egy R sugarú vezető földelt gömböt E erősségű konstans elektromos térbe helyezünk! Az eredeti tér a $+z$ irányba mutat.

Megoldás:
Tudjuk a 2. Gyakorlat/I/b feladatól, hogy a két végtelenül messzi végtelenül nagy pontöltés tere az origó közelében $\mathbf{E} = -8\frac{kq}{d^2}\hat{\mathbf{z}}$ teret kelt, ahol a $\frac{q}{4\pi d^2} \equiv \eta$ rögzített!. Ekkor vegyük a gömbön belüli tükörtöltéseket, mint helyettesítő elrendezést, amiknek a nagysága és pozíciója $\pm q' = \mp\frac{R}{d}q$, $d'_\pm = \pm\frac{R^2}{d}$, aminek hatására a teret ki tudjuk számolni, mint négy töltés tereinek szuperpozíciója, észben tartva, hogy $q \to \infty$, $d \to \infty$, $\frac{q}{4\pi d^2} = \text{const.}$, az origótól nem túl messze:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 8\frac{\eta}{\varepsilon_0}z + \frac{kqR}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + R^2/d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - R^2/d)^2}}\right) \tag{18}$$

A második tagban ismét végre kell hajtanunk egy sorfejtést, hogy megjelenjen a véges értékű η paraméter, $\frac{1}{\sqrt{r^2+(z\pm R^2/d)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \mp \frac{1}{(r^2+z^2)^{3/2}}\frac{zR^2}{d}$, tehát a nulladrendű tagok ki fognak esni és végeredményben a következő adódik:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx 8\frac{\eta}{\varepsilon_0}z + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} \tag{19}$$

ahol láthatóan egy dipólus terét kaptuk vissza a gömbön belüli tükörtöltésekből, ahol $\mathbf{p} = -\frac{k\eta R^3}{\varepsilon_0}$, ahonnan a térerősség, felhasználva, hogy $-\nabla\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{p}r^2 - 3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -8\frac{\eta}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} + \frac{\mathbf{p}r^2 - 3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} \tag{20}$$

Ha a gömb felületén a potenciál V_0, miként módosulnak a fenti mennyiségek?
Megoldás:
Ezesetben egy olyan ponttöltést kell még beraknunk a középpontba, ami biztosítja a V_0 potenciált a gömb felszínén, $\tilde{q} = \frac{RV_0}{k}$, ami által a teljes potenciál kiegészül egy extra járulékkal $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{RV_0}{r}$, illetve a térerősség járulék, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{RV_0}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$.

V. KÉT VÉGTELEN HOSSZÚ VONALTÖLTÉS

Adott egy $-\lambda$ és egy λ töltéssűrűségű végtelen pálca, amelyek a z-tengellyel párhuzamosak, és az $x = -a$, valamint az $x = a$ pontokat metszik. Bizonyítsa be, hogy ennek a töltéselrendezésnek az ekvipotenciális felületei hengerek! Számolja ki a hengerek sugarait és tengelyeinek koordinátáit!
Megoldás:
A Gauss-tétel alapján tudjuk, hogy egy ilyen pálca tere $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\lambda k}{r}\hat{\mathbf{r}}$, henger koordinátákban, $r^2 = x^2 + y^2$, ahonnan a potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 2\lambda k \ln\left(\frac{r_\pm}{r_0}\right), \; r_\pm = \sqrt{(x \mp a)^2 + y^2} \tag{21}$$

Tehát a teljes potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r}) = 2\lambda k \ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right) \tag{22}$$

Vagyis olyan x, y-okat kell keresnünk, amire a fenti kifejezés állandó, azaz $r_+ = Cr_- \to x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = C^2x^2 + 2C^2xa + C^2a^2 + C^2y^2$, ahol C egy tetszőleges konstans. Átrendezve az egyenletet és bevezetve az $b = \frac{C^2+1}{C^2-1}$ változót a következő egyenlet adódik

$$x^2 + y^2 + 2abx + b^2a^2 = \left(b^2 - 1\right)a^2 \to (x + ba)^2 + y^2 = \left(b^2 - 1\right)a^2 \tag{23}$$

ami nyilvánvalóan egy kör egyenletének felel meg! A hengerek korrdinátái $y = 0$, illetve $x = ba$, ahol a bevezetett b paramétert a $\frac{r_+}{r_-} = C$ paraméterből származtattuk, ami kifejezhető a potenciállal, $2\lambda k \ln C = V \to C = e^{\frac{V}{2\lambda k}} \to b = \frac{e^{\frac{V}{\lambda k}}+1}{e^{\frac{V}{\lambda k}}-1}$, illetve a hengerek sugara $\left(b^2 - 1\right)a$.

VI. PONTTÖLTÉS KÉT SÍKFELÜLET KÖZÖTT

Két földelt végtelen síkfelületet a távolságra helyezünk egymástól. A síkok párhuzamosak. A két sík közé, az egyik síktól x távolságra egy ponttöltést helyezünk. Mekkora a q-ra ható erő? Ellenőrizze az $a \to \infty$, és az $x = a/2$ eseteket!
Megoldás:
A két fémlapnál egyszerre kell teljesülnie a határfeltételnek, vagyis, hogy a tölés által keltett erővonalak merőlegesek a felszínén. Ekkor először tükrözzük a q töltést az alsó síklapra, ekkor az alsó síklap ekvipotenciálissá válik és összesen lesz egy (q, x) és egy $(-q, -x)$ töltéspárunk, majd ismételjük meg ezt a felső síklapra is, ami ad egy $(-q, 2a - x)$ tükrötöltést, ekkor azonban a két tükörtöltés terei nem adnak ekvipotenciális járulékot a fémfelületen, vagyis az alsó síklap tükörtöltését tükröznünk kell a felsőre és fordítva, a felső lap tükörtöltését tükröznünk kell az alsóra. Ami ad egy $(q, x-2a)$ és egy $(q, 2x+a)$ töltéspárt, amiket aztán ismét tökröznünk kell a korábbi módon, vagyis az alsó lap alatt megjelent töltést a felső lapra és a felső lap felettit az alsó fémlapra. Látható, hogy az először az alsó lapra tükrözött töltésből induló töltések a következő az eredeti töltéstől mért távolságokkal fognak menni: $r_1 = x - (-x)\,, r_2 = 2a + x - x\,, r_3 = x - (-2a - x)\,, r_1 = 2(4a + x) - x\,, \cdots \to r_{2k} = 2ka$, $q_{2k} = q$, $r_{2k+1} = 2ka + 2x\,, g_{2k+1} = -q$. Hasonló módon a felső lapról indított tükrözések a következő távolságokat adják: $r_1 = 2a - 2x\,, r_2 = 2a\,, r_3 = 4a \cdots \to r_{2k} = 2ka\,, q_{2k} = q\,, r_{2k+1} = 2(k+1)a - 2x\,, q = -q$. Innen már ki tudjuk számítani az erőt hiszen tudjuk a távolságokat:

$$\begin{aligned} F &= \frac{kq}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k^2a^2} + \frac{1}{((k+1)a - x)^2} - \frac{1}{k^2a^2} - \frac{1}{(ka + x)^2}\right] = \frac{kq}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{((k+1)a - x)^2} - \frac{1}{(ka + x)^2}\right] \\ &= \frac{kq}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)(2x - a)}{((k+1)a - x)^2(ka + x)^2}, \end{aligned} \tag{24}$$

amit nem tudunk zárt alakban kiszámolni, azonban tekintsünk két jellegzetes/szemléletes határestet, $x = a/2$, ekkor a második felírás által látszódik, hogy a szummában minden tag éppen kinullázódik, ezért a várt módon $F = 0$ adódik! A másik határ esetben $a \to \infty$ csak az első tagot hagyjuk meg a szummából, minden más el van nyomva $1/a^2$-el

$$F \approx -\frac{kq}{4x^2}, \tag{25}$$

ami azt is jelzi, hogy ebben a határesetben csak az alsó lemez játszik szerepet!