Példák: Eltolási áram, megmaradási tételek

I. ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

1. Eltolási-áram:
   A negyedik Maxwell egyenlet a harmadik mintájára kiegészíthető egy az elektromos tér megváltozásából adódó járulékkal:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1}$$

   Látható, hogy ha egy elektromos tér $\sim \mathbf{E}(\omega t)$ módon lassan változik az időben, akkor a gerjesztett mágneses tér a Faraday-törvány alapján $\sim \omega$-val lesz arányos, aminek következtében az $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \sim \omega^2/c^2$. Vagyis látható, hogy ha nem elég nagy a frekvencia, akkor jó közelítéssel elhagyható a $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ tag, illetve fordítva is igaz, ha kezdetben a mágneses tért kezdjük el időben változtatni. Ezt nevezzük kvázistacionárius határesetnek.

2. Elektromágneses tér impulzus mérlegegyenlete:
   Az impulzus megváltozásának sűrűsége $\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, melyet a elektromos és a mágneses terek segítségével egy mérlegegyenlet alakjába írhatunk, ismét rendre "forrás'+'sűrűség időderiváltja"+"beáramló impulzus áramsűrűség":

$$\partial_t g_i + \partial_j T_{ij} + \rho E_j + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = 0 \tag{2}$$

   ahol mindent az i. impulzus komponensre írtunk fel, ahol $T_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{DE} + \mathbf{BH})\,\delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j$, illetve $\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$.

II. SÍKKONDENZÁTOR TÖLTÉS KÖZBEN (A TÍPUSÚ)

A 1. ábrában adott két fémlap amely egy áramkörben egy síkkondenzátort képez, vékony huzalokkal bekötve, amelyek áramot vezetnek a síklapokba. Az I áram állandó, a kondenzátor sugara a, és a fémlapok közötti rés szélessége $w << a$. Az áram oly módon folyik a síklapokba, hogy a töltéseloszlás egy adott pillanatban egyenletesnek tekinthető. $t = 0$ időben a fémlapokon jelenlévő töltés nulla.

1. Mekkora az elektromos tér a síklapok között egy adott t időben?
2. Mekkora a teljes eltolási áram egy s sugarú körön belül, amelynek középpontja az elrendezés forgástengelye, és amelyik a két sík között félúton van? Mekkora a mágneses tér ugyanezen kör kerületén?
3. Ismételje meg az előző feladatot, de most a számolást a 2. ábrán mutatott henger felületen végezze! Megjegyzés: az eltolási áram ezen a felületen keresztül zérus, és a hengeren belüli áramnak két komponense van.

Megoldás:

1. A lemezeken megjelenő töltés egyszerűen arányos a befolyó árammal, $Q(t) = It$, ahonnan a síkkondenzátoroknál alkalamzott egyszerű közelítéssel az elektromos tér $E(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A} = \frac{It}{\varepsilon_0 A}$
2. Elotlási áram definíció szerint a 4. Maxwell egyenelt szerint:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3}$$

   Esetünben az eltolási áram nem függ a helytől $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{I}{A}\hat{\mathbf{z}}$. Ekkor az adott s sugarú kör kerültetén ismét az Ampere-törvény segítségével tudjuk kiszámítani a mágneses teret:

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathbf{B} = 2\pi s B = \mu_0 \frac{\pi s^2 I}{A} \Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I s}{2A} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{4}$$

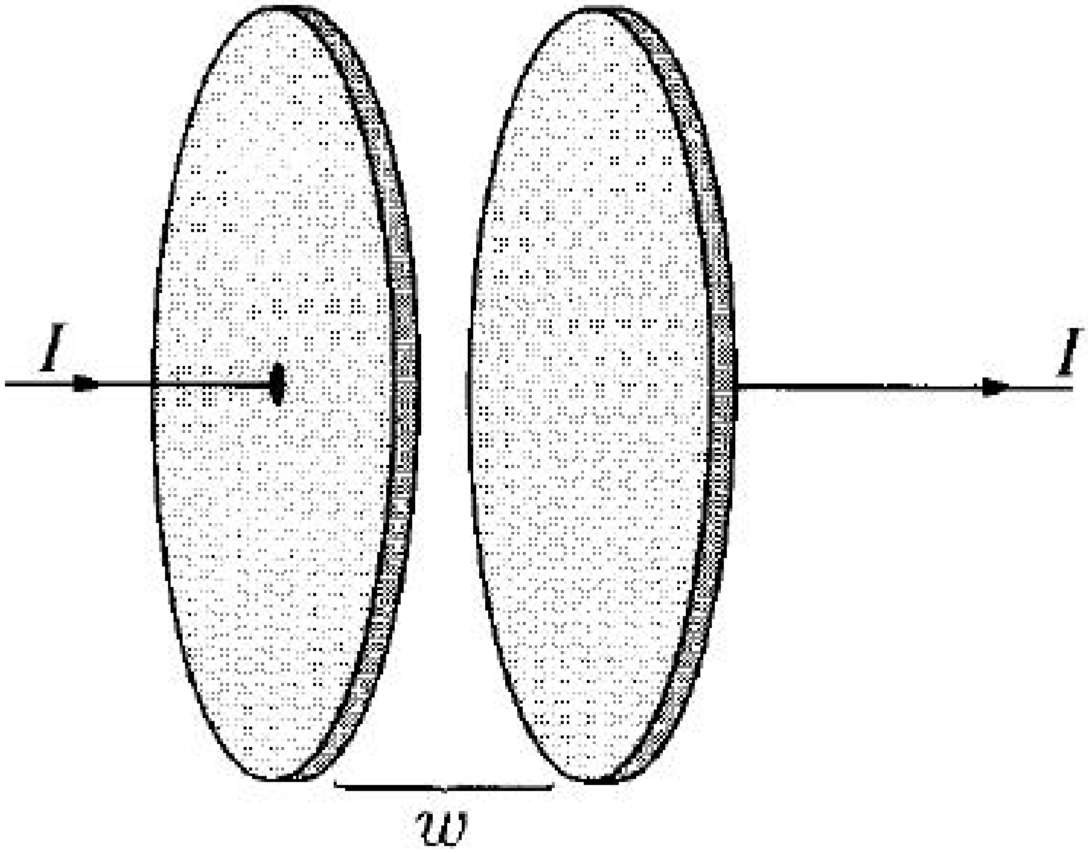

FIG. 1. Kondenzátor elrendezés, töltés közben.

3. Ekkor a kondenzátoron megjelenő időben változó felületi töltéssűrűséget a következőképpen írjuk fel:

$$\sigma(t) = \frac{I - I'(s)}{\pi s^2} t \tag{5}$$

ahol $I'(s)$ a lemezeken merőlegesen áthaldó áram s sugárnál áram, míg a $I - I'(s)$ széfolyik a kondenzátor lemezeken, illetve ekkor természetesen $I'(a) = 0$. Ekkor mivel a felületi töltéssűrűség állandó marad a következővel paraméterezhetjük a lemezeken keresztülfolyó áramot $\beta s^2 = I - I'(s)$, hozzávéve azt, hogy $I'(a) = 0 \Rightarrow \beta = I/a^2$, amiből a felületi töltéssűrűség:

$$\sigma(t) = \frac{\beta}{\pi} t = \frac{I}{\pi a^2} t \tag{6}$$

III. HUZAL, KÉT IRÁNYBAN FOLYÓ ÁRAMMAL (B TÍPUSÚ)

Egy végtelen hosszú huzalon $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ áram folyik. A huzalt egy a sugarú henger veszi körül, amelynek a felületén $-I(t)$ áram folyik. Feltételezzük, hogy a tér nullához tart az $r \to \infty$ limeszben.

1. Kvázistacionárius közelítésben határozza meg az indukált elektromos térerősséget!

2. Határozza meg az eltolási áram sűrűségét!

3. Integrálja a fenti eredményt, hogy megkapja a teljes eltolási áramot!

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{f}. \tag{7}$$

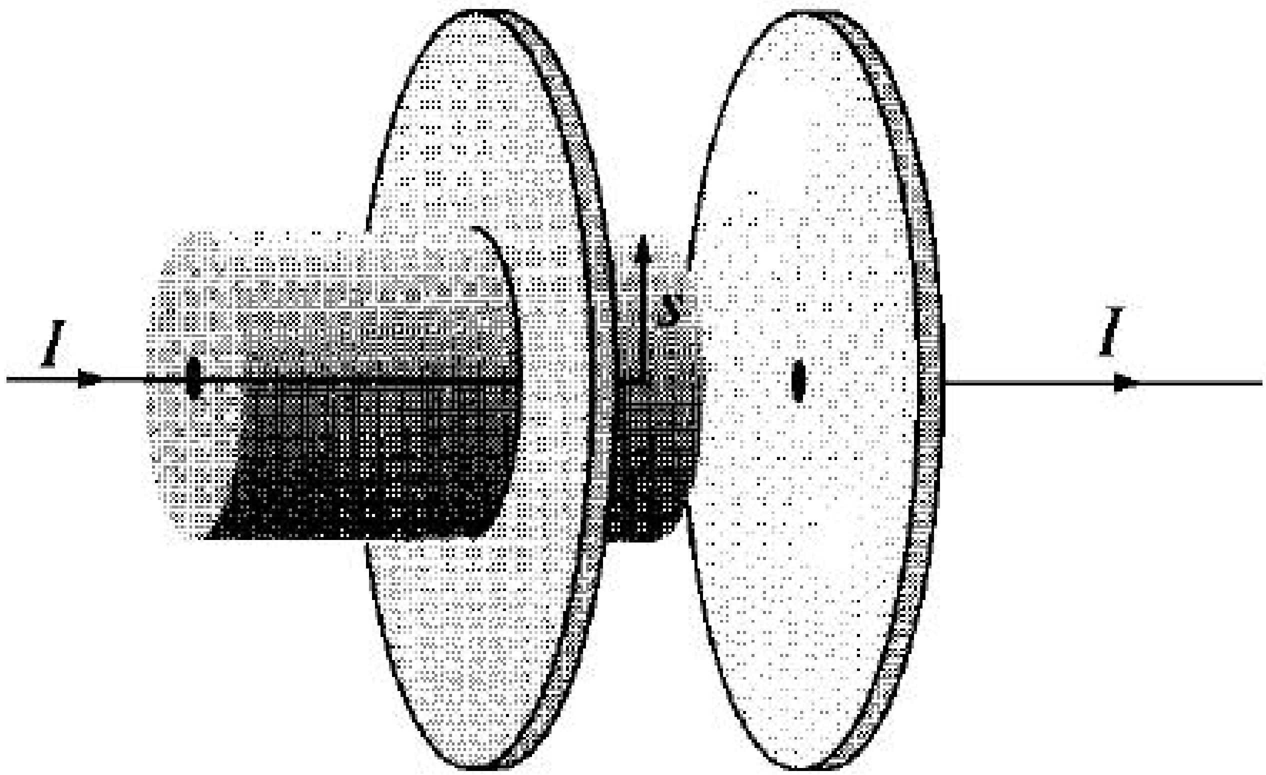

FIG. 2. Kondenzátor elrendezés, töltés közben.

4. Hasonlítsa össze az I_d-t és az I-t. Mi az arányuk? Határozza meg, milyen kell legyen a frekvencia, hogy az eltolási áram elérje a vezetőben folyó I áram 1%-át, amennyiben $a = 1$ mm!

   A fentiek alapján vajon miért nem fedezte fel Faraday az eltolási áramot? (Megjegyzés: maga Maxwell is az eltolási áram fogalmát puszta elméleti alapon vezette le.)

Megoldás:

1. Felhasználva az Ampere törvényt ekkor az áram által keltett mágneses tér csak az a sugarú hengeren belül van jelen, és értéke a "szokásos" módon:

$$B(t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\cos(\omega t)\,, \text{ ha } r < a \tag{8}$$

   Ekkor a változó mágneses tér által generált elektromos tér a $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r}\sin(\omega t)$ alapján számítható ki, aminek csak z irányú, r függő komponense van, ahonnan a rotáció $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial_r E_z(r)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi r}\sin(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \Rightarrow E_z(r) = -\frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\sin(\omega t)$, ahol a logaritmus hasában lévő konstanst úgy választottuk meg, hogy az elektromos tér a hengeren kívül nulla legyen, hiszen ott mángeses tér sincs jelen! A kvázistacionárius közelítés feltétel ekkor ott jelenik meg, hogy kellően kicsi frekvencia esetén a változó elektromos tér által generált mágneses tér már elhanyagolhatóan pici!

2. Az elotlási áram definíció szerint

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \varepsilon_0 I_0 \omega^2}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{a}\right)\cos(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}} \tag{9}$$

3. A teljes eltolási áramhoz a henger keresztmetszetére kell vennünk az eltolási áramsűrűség felületi integrálját, azaz

$$I_d = \int \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{J}_d = -\mu_0\varepsilon_0 I_0\omega^2\cos(\omega t)\int_0^a \mathrm{d}r\, r\ln\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\mu_0\varepsilon_0 I_0 a^2\omega^2}{4}\cos(\omega t) \tag{10}$$

4. Innen a két áram nagyságának aránya akkor lesz egy százalék, $a = 10^{-3}$ mm esetén, ha a következő frekvenciát választjuk meg

$$\frac{I_d}{I} = \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega^2 a^2}{4} = \frac{\omega^2 a^2}{4c^2} \approx 10^{-22}/36\,\omega^2 \approx 3\times 10^{-24}\omega^2 \Rightarrow \omega\sqrt{36\times 10^{18}} = 6\times 10^9 s^{-1} \tag{11}$$

IV. KOAXIÁLIS KÁBEL TELJESÍTMÉNYE (A TÍPUSÚ)

Egy hosszú koaxiális kábelben I áram folyik az a sugarú henger felületén egyik irányban, a b sugarú henger felületén az ellentétes irányban (3. ábra). A két vezető közötti potenciálkülönbség V. Számolja ki a kábelen átfolyó teljesítményt!

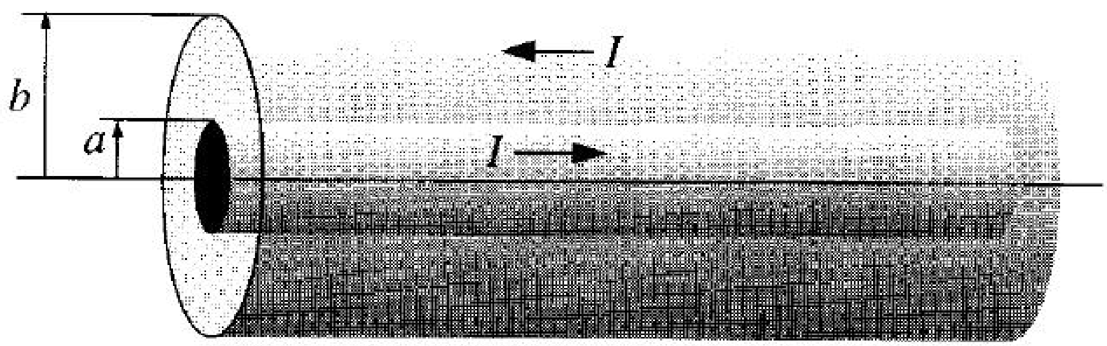

FIG. 3. Koaxiális kábel.

Megoldás:

$$\mathbf{B} = 0,\ \text{ha } r < a \tag{12}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{13}$$

$$\mathbf{B} = 0,\ \text{ha } r > b \tag{14}$$

Míg az elektromos tér, hasonló nódon 3 részre osztható a kábelen belül, ahol ismét csak a belső részben lesz nem zérus az értéke. V potenciálkülönbség esetén a térerősség a hengerszimmetrikus elrendezés miatt biztosan $\mathbf{E} \sim \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}$ alakú lesz, a konstans faktort pedig az határozza meg, hogy tudjuk az integrálja a- tól b-ig V-t ad, azaz $\int_a^b \mathrm{d}r\,\frac{V_0}{r} = V \Leftrightarrow E = \frac{V}{r\ln(b/a)}$, ahonnan a teljes térerősség:

$$\mathbf{E} = 0,\ \text{ha } r < a \tag{15}$$

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r\ln(b/a)}\hat{\mathbf{r}} \tag{16}$$

$$\mathbf{E} = 0,\ \text{ha } r > b \tag{17}$$

Innen megadható definíció szerint a Poyting vektor, azaz az elektromágneses tér általszállított energia áramssűrűség:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{V}{r\ln(b/a)}\frac{I}{2\pi r}\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{IV}{2\pi\ln(b/a)\,r^2}\hat{\mathbf{z}} \tag{18}$$

Ekkor az átfolyó teljesítmény egyszerűen csak a Poyting vektor felületi integrálja arra a felületre, amelyiken átfolyik:

$$\oint \mathrm{d}^2\mathbf{f}\,\mathbf{S} = 2\pi \int_a^b \mathrm{d}r\, r \frac{IV}{2\pi r^2 \ln(b/a)} = IV \tag{19}$$

V. EGYENLETES TÖLTÉSŰ GÖMB (A TÍPUSÚ)

Adott egy egyenletesen töltött (Q), R sugarú gömbhéj. Határozza meg a a gömbhéj északi felére ható eredő erőt a Maxwell-féle feszültségtenzor alkalmazásával!

Megoldás:

Elektromágneses tér impulzus mérlegegyenlete:

$$\partial_t g_i + \partial_j T_{ij} + (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B})_i = 0 \tag{20}$$

ahol $\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}$ az impulzus sűrűség, $\partial_j T_{ij}$ pedig az impulzus áramsűrűség, míg az utolsó tag az impulzus forrás, illetve ahol $T_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{DE}+\mathbf{BH})\,\delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j$. Esetünkben $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$. Így $\mathbf{g} = 0$, vagyis ki tudjuk számolni az erőt a feszültség tenzor segítségével:

$$T_{ij} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}(\delta_{ij} - 2\hat{r}_i\hat{r}_j) \tag{21}$$

Ekkor az erő sűrűséget a felső félgömbre kell kiintegrálnunk, amihez alkalmazzuk a Gauss-tételt a feszültség tenzor z. komponensére:

$$\begin{aligned} F_z &= -\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\partial_j T_{zj} = -\oint \mathrm{d}^2|\mathbf{f}|\,\hat{r}_j T_{zj} = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin\theta\,(\delta_{zj} r_j - 2\hat{r}_z\hat{r}_j^2) = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^4}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\sin\theta\,\hat{r}_z \\ &= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\sin\theta\cos\theta = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \end{aligned} \tag{22}$$

mivel $\hat{r}_z = \cos\theta$ definíció alapján. Illetve ahol a Gauss tétel a következőképpen került alkalmazásra, nevezzük el a T_{zj} vektorkomponenst $\mathbf{T}_z$ vektormezőnek és felírva az infinitezimális $(\mathrm{d}^2\mathbf{f})_j = \mathrm{d}^2|\mathbf{f}|\hat{r}_j$

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\nabla\mathbf{T}_z = \oint d^2|f|\hat{r}_j\,\mathbf{T}_z = \oint d^2|f|\hat{r}_j\,T_{zj} \tag{23}$$