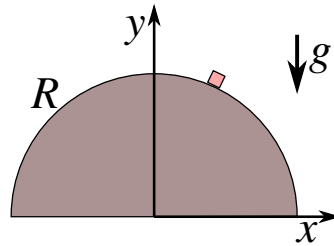


1. Egy R sugarú súrlódásmentes félkör alakú henger tetejéről egy m tömegű kicsiny test csúszik le. A pálya tetőpontján a kezdősebessége elhanyagolhatóan kicsiny. A fő célunk annak meghatározása, hogy hol válik el a kicsiny test a hengertől, és kezd szabadon repülni.



- Először tegyük fel, hogy a test a henger felszínén mozoghat csak. Válasszunk kényelmes koordinátarendszert, és írjuk fel ebben ezt a kényszert, $f(x, y) = 0$ alakra rendezve!
- A kényszerfeltétel figyelembevételével írjuk fel a test Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletét!
- Az (a) feladatban megadott kényszeregyenletet idő szerinti kétszeri deriválásának segítségével fejezzük ki a λ Lagrange-multiplikátort, mint $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$ függvényét!
- Írjuk fel az energiamegmaradást a problémára, és mutassuk meg, hogy a λ Lagrange-multiplikátor nem jelenik meg ebben az egyenletben!
- Az energiamegmaradási egyenletet felhasználva fejezzük a (c) feladat kifejezését alakítsuk úgy, hogy λ az E energiától, valamint az y magasságtól függjön már csak.
- A kezdeti feltételből leolvashatjuk az E energiát. Vizsgáljuk λ előjelét, és adjuk meg, hol válik le a test a hengerről.

2. Legyen adott az

$$y = -ax^2$$

egyenletű parabola felületű rögzített test, ahol $a > 0$. Egy m tömegű testet elindítunk v_0 nagyságú vízszintes irányú sebességgel a parabola felületén. (A test végig az $x - y$ síkban mozog.) Súrlódás nincs. Milyen v_0 sebesség mellett marad a test a felületen?

- Határozza meg a kényszereket!
- A kényszerfeltétel figyelembevételével írjuk fel a test Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletét!
- Az (a) feladatban megadott kényszeregyenletet idő szerinti kétszeri deriválásának segítségével fejezzük ki a λ Lagrange-multiplikátort, mint $\{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$ függvényét!
- A Lagrange-multiplikátorból olvassa le, hogy mikor válik el a test a felülettől!
- Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét!
- A Lagrange-függvény segítségével írja fel a rendszer mozgásegyenletét!

3. Egydimenzióban k rugóállandójú, l nyugalmi gúszúságú rugóval össze van kötve két m tömegű test. A testek súrlódásmentesen mozognak az egydimenziós térben. Egyéb erőhatás nincs.

- Vezessen be megfelelő koordinátákat!
- Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét!
- Írja fel a rendszer mozgásegyenletét a Lagrange-függvény segítségével!

4. Egy kétdimenziós súrlódásmentes asztallapon van két m tömegű test, l hosszú súlytalan merev rúddal összekötve.

- (a) Vezessen be megfelelő koordinátákat!
 - (b) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét!
 - (c) Írja fel a rendszer mozgásegyenletét a Lagrange-függvény segítségével!
5. Az ábrán látható ék meredeksége α , tömege M és súrlódásmentesen csúszik az asztallapon. Az ék felülete is súrlódásmentes, amire ráhelyezünk egy kis m tömegű testet.

- (a) Vezessen be megfelelő koordinátákat!
- (b) Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét!
- (c) Írja fel a rendszer mozgásegyenletét a Lagrange-függvény segítségével!

