Mind a négy feladat 25 pontot ér, az elégséges ponthatára 40 pont.

---

1. Egy tömegpont v_0 állandó sebességű síkmozgást végez, melynek $r(\varphi)$ polárkoordinátás pályaegyenlete
$$r(\varphi) = 2R\cos(\varphi).$$
   (a) Feltéve hogy ismeri a $\varphi(t)$ időfüggvényt, írja fel ennek segítségével (a pálya-egyenletet is kihasználva) a tömegpont $\vec{r}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
   (b) Annak ismeretében, hogy a sebesség állandó v_0 nagyságú, adja meg a tényleges $\varphi(t)$ függvényt!
   (c) Adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát, felhasználva az előző feladatban meghatározott $\varphi(t)$ függvényt! az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
   (d) Adja meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
   (e) Milyen görbét ír le a tömegpont mozgása? Rajzolja le!
   (f) Adja meg a pálya görbületi sugarát!

---

2. Egy m tömegű tömegpont az x tengely mentén mozoghat, miközben külső erő hat rá, melynek potenciálja $V(x) = V_0 \,\mathrm{tg}^2(\alpha x)$, ahol $V_0 > 0$ és $\alpha > 0$. A célunk, hogy megadjuk a tömegpont rezgéseinek periódusidejét az E energiájának függvényében.
   (a) Írja fel a periódusidőt meghatározó integrál általános alakját!
   (b) Ismeretes az alábbi integrál eredménye,
$$\int_{-a}^{a} \frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}\ .$$
   Az (a) feladatban kapott integrált alakítva ($y = \mathrm{tg}(\alpha x)$ helyettesítés hasznos lehet!) adja meg a T periódusidőt az E energia függvényében!
   (c) Ábrázolja a $T(E)$ függvényt!
   (d) Minek felel meg az eredmény az $E \ll V_0$ határesetben?
   (e) Értelmezze az $E \gg V_0$ határeset eredményét is!

---

3. Kicsiny, pontszerű részecskék szóródnak az alábbi vonzó centrális potenciálon:
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^3}\ ,$$
ahol $\alpha > 0$ egy pozitív állandó. A részecskék tömege m, energiájuk E, amiről tudjuk, hogy pozitív.

(a) Adja meg a $V_{\text{eff}}(r)$ effektív potenciál kifejezését különböző b impakt paraméterű részecskék esetén!

(b) Rajzolja fel kvalitative a $V_{\text{eff}}(r)$ effektív potenciált!

(c) Adja meg a $b_{\max}$ maximális impakt paramétert, aminél kisebb b-k esetén a részecskék áthaladnak az $r = 0$ vonzócentrumon!

---

4. Homogén ρ sűrűségű anyagból készítettünk egy α félnyílásszögű, h magasságú kúp alakú testet, melyet az ábrán látható módon egy vízszintes asztalra helyeztünk. A kúp ezután csúszásmentesen gördül az asztalon úgy, hogy a z-vel jelölt szimmetriatengelye a függőleges tengely körül Ω szögsebességgel forog. (lásd ábra!) Vizsgálja ezt a mozgást!

   (a) Szimmetria-megfontolásokból tudjuk, hogy (az ábrán jelzett $x - y - z$ koordinátarendszerben) a kúp csúcspontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték tenzora az alábbi alakú,
   $$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_2 \end{pmatrix} .$$
   Határozza meg a Θ_1 és Θ_2 főtehetetlenségi nyomatékokat!

   (b) Használja, hogy a kúp csúszásmentesen (tisztán) gördül, és ennek segítségével adja meg a kúp z-tengely körüli ω szögsebességét az Ω szögsebesség ismeretében.

   (c) Adja meg a kúp teljes $\vec{\omega}$ szögsebesség-vektorát. Figyeljen az egyes forgások (ω és Ω) irányára!

   (d) Adja meg a kúp $\vec{L}$ perdületvektorát!

   (e) A perdületvektor időbeli változásából adja meg a kúpra ható erők eredő forgatónyomaték-vektorát!