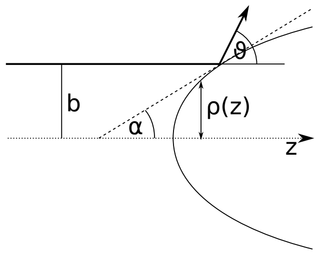
Mind a négy feladat 25 pontot ér, az elégséges ponthatára 40 pont.

1. Egy tömegpont állandó ω szögsebességgel mozog a síkon, pályájának polárkoordinátás egyenlete
$$r(\varphi) = Re^{k\varphi}$$
alakban írható fel (R és k konstans). A tömegpont t=0-ban a φ=0-val jellemzett pontból indul.
   (a) Adja meg a tömegpont $\dot{\vec{r}}(t)$ sebességvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
   (b) Adja meg a tömegpont $\ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásvektorát az $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$ bázisban kifejtve!
   (c) Adja meg a pálya görbületi sugarát!
   (d) Mekkora a tömegpont perdülete és ez miért változik?
   (e) Rajzolja fel a tömegpont pályáját!

2. Egy m tömegű, E energiájú, L perdületű tömegpont az alábbi centrális potenciálban mozog:
$$V(r) = \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2,$$
ahol Ω konstans.
   (a) Adja meg a $V_{\text{eff}}(r)$ effektív potenciált!
   (b) Ábrázolja kvalitative az effektív potenciált!
   (c) Adja meg, hogy mikor mozoghat a tömegpont körpályán?
   (d) Tegyük fel, hogy a tömegpont stabilis körpályán mozgott, de kis mértékben megzavartuk, ezért a körpálya körül kicsiny oszcillációkat végez. Adja meg ezen oszcilláció frekvenciáját!
   (e) Mi a feltétele az önmagába záródó ún. zárt pálya kialakulásának?

3. Egy nagyon nagy forgási paraboloid alakú tükröt a paraboloid szimmetriatengelyével párhuzamosan fénnyel világítunk meg. A tükör tengelye a z tengely, a paraboloid alakját a $\rho(z) = A\sqrt{z}$ kifejezéssel adjuk meg.



   (a) Adja meg a parabola azon érintőjének vízszintessel bezárt α szögét, amely a szimmetriatengelytől b távolságra érinti a parabolát!

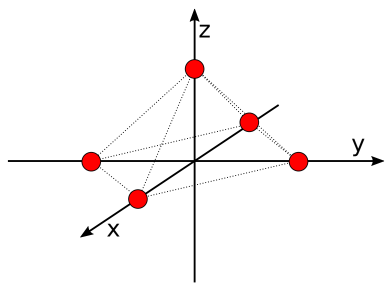
   (b) Az előző részfeladat eredményét felhasználva adja meg a b impakt-paraméterű fénysugár ϑ szóródási szögét!

   (c) Adja meg a szórás $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ differenciális hatáskeresztmetszetét! Fejezze ezt ki, mint a b impakt-paraméter függvényét!

   (d) Detektorainkkal csak a $\vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tartományba szóródó részecskéket detektáljuk Adja meg az ebbe a tartományba való szóródás teljes hatáskeresztmetszetét! (*Tipp: adja meg a* $b_{\max}$ *impakt-paramétert, melynél a szóródási szög* $\vartheta = \pi/2$.)

---

4. Könnyű drótból piramist készítettünk, melynek csúcsaiba m tömegű tömegpontokat (összesen ötöt) rögzítettünk. A koordinátarendszerünket úgy választottuk meg, hogy a pirmis csúcsa a z tengelyre, a többi tömegpont pedig az x, vagy y tengelyre esik. A tömegpontok pozíciói az $x-y-z$ koordinátarendszerben tehát $\vec{r}_1 = (0{,}0{,}b)$, $\vec{r}_2 = (+a{,}0{,}0)$, $\vec{r}_3 = (-a{,}0{,}0)$, $\vec{r}_4 = (0, +a{,}0)$, és $\vec{r}_5 = (0, -a{,}0)$, ahol a és b ismert mennyiségek.



   (a) Adja meg a piramis origóra vonatkoztatott tehetetlenségi-nyomaték tenzorát!

   (b) Adja meg a piramis tömegközéppontjának koordinátáit!

   (c) Adja meg a piramis tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

   (d) Sikerült szerencsésen megválasztanunk az a és b értékeket, így tetszőleges szögsebességgel elengedve a piramist, a szögsebesség-vektor állandó marad a szabad forgás során. Mekkora a szerencsés a/b arány?
