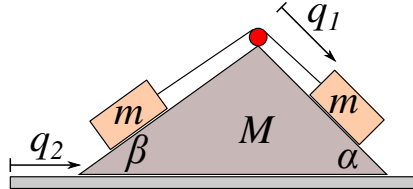
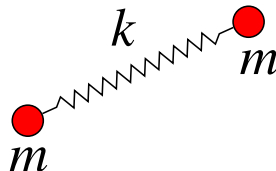


1. kis-ZH feladatok

1. Egy M tömegű kétoldalú, egyik oldalán α másik oldalán β dőlésszögű súrlódásmentes lejtő a vízszintes talajon súrlódásmentesen mozoghat. A lejtő tetején elhelyezett könnyű csigán átvettünk egy nyújthatatlan fonalat, aminek két végét egy-egy m tömegű téglához kötöttük. Legyenek az általános koordinátáink a jobboldali téglától mért q_1 távolsága, és a lejtő vízszintes q_2 helyzete.

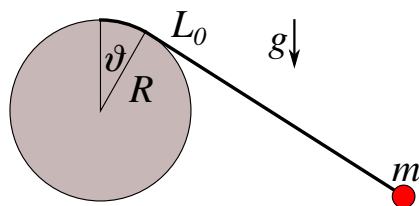


- Írja fel a rendszer helyzeti energiáját a q_1 és q_2 függvényében!
 - Írja fel a rendszer mozgási energiáját \dot{q}_1 és \dot{q}_2 függvényében!
 - Az előző két feladat alapján adja meg a rendszer $L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ Lagrange-függvényét, és vezesse le belőle a rendszer mozgásegyenleteit!
 - Határozza meg a q_1 -hez és q_2 -höz tartozó általánosított impulzusok definícióját a Lagrange-függvényből.
 - A kezdeti pillanatban a rendszert a $q_1 = 0$ és $q_2 = 0$ helyzetből indítottuk, $\dot{q}_1 = 0$ és $\dot{q}_2 = v_0$ kezdősebességekkel. Adja meg a $q_1(t)$ és $q_2(t)$ függvényeket!
2. Két m tömegű tömegpontot elhanyagolható nyugalmi hosszúságú, k rugóállandójú gumiszállal kötöttünk össze. A két tömegpont a vízszintes $x - y$ síkon mozoghat súrlódásmentesen. A rendszer helyzetét leíró általános koordináták legyenek a tömegközéppont X és Y koordinátái, valamint az egyik tömegpontból a másikba mutató \vec{r} vektor x és y koordinátái.



- Írja fel a rugalmas (helyzeti) energia kifejezését x és y segítségével!
 - Írja fel a rendszer mozgási energiáját \dot{x} , \dot{y} , \dot{X} és \dot{Y} segítségével.
 - Az előző feladatok eredményeit felhasználva írja fel a rendszer Lagrange-függvényét, és vezesse le belőle a mozgásegyenleteket!
 - Mutassa meg, hogy az X -hez és Y -hoz tartozó általánosított impulzusok megmaradó mennyiségek!
 - Adja meg az x -re és y -ra vonatkozó egyenletek általános megoldását! „Hogyan mozog” a rendszer?
3. Egy R sugarú henger felső pontjához egy összesen L_0 hosszúságú könnyű kötelet rögzítettünk. A kötel másik végére egy m tömegű kicsiny testet kötöttünk. A testre a kötélen kívül hat a külső gravitációs erőter is. A rendszer mozgását vizsgáljuk abban az esetben, amíg a kötel feszes marad, és mindig van a hengerre rásimuló szakasza. A rendszer helyzetét a hengerre simuló kötel által letakart ϑ szöggel jellemezzük.

- Adja meg a rendszer helyzeti energiáját ϑ függvényében!
- Adja meg a rendszer mozgási energiáját ϑ és $\dot{\vartheta}$ függvényében!



- (c) Adja meg a rendszer Lagrange-függvényét, és vezesse le a mozgásegyenletet!
- (d) Fejezze ki a ϑ -hoz tartozó általánosított impulzust!
- (e) (EXTRA, gyakorlásra!) A rendszer egyensúlyi helyzete az, amikor a kötélfüggőlegesen lóg lefelé ($\vartheta = \pi/2$). Fejtse sorba a Lagrange-függvényt ezen helyzet körül a ϑ és $\dot{\vartheta}$ szerint másodrendig, és adja meg a kis rezgések frekvenciáit.

2. Gyakorló feladatok

- Gy1. Egy tömegpont súrlódásmentesen mozoghat egy függőleges tengelyű, 2α nyílásszögű kúpfelület belsejében. A gravitációs gyorsulás függőlegesen lefelé mutat. Írja fel a rendszer Lagrange-függvényét és adja meg a mozgásegyenleteket! Mik a megmaradó mennyiségek? Keressen olyan megoldást, amikor a tömegpont állandó magasságban kering!
- Gy2. (**Nehéz feladat**) Tekintsük a szimmetrikus pörgettyű problémáját. (Lásd 7. gyak 3. feladat) A pörgettyű helyzetét a következőképpen írjuk le: a tengely helyzetét a szokásos gömbi ϑ - φ koordinátákkal írjuk le, míg a tengely körüli elfordulását az α szöggel. Mivel a pörgettyű szimmetrikus, ezért a tengelye főtengely, erre a tengelyre a tehetetlenségi nyomatéka θ_{\parallel} , ahogy a rá merőleges tengelyek is főtengelyek θ_{\perp} tehetetlenségi nyomatékkal. (Tegyük fel, hogy ezek az adatok a pörgettyű felfüggesztési pontjára, mint origóra vannak megadva.)
- (a) Írjuk fel a pörgettyű helyzeti energiáját a ϑ , φ és α függvényében!
 - (b) Írjuk fel a pörgettyű forgási energiáját!
 - (c) Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a Lagrange egyenleteket!
 - (d) Vizsgáljuk azt a határesetet, amikor α nagyon nagy, azaz nagyon megpörgettük a pörgettyűt. Mutassuk meg, hogy ekkor precesszál a rendszer!