3. NYOMÁS, HIDROSZTATIKAI NYOMÁS ÉS FELHAJTÓERŐ, IDEÁLIS GÁZ NYOMÁSA, GÁZTÖRVÉNY, KÖRFOLYAMATOK

1. GYAKORLAT

A nyomóerő nem mindegy, mekkora felületen hat, ha a lokális hatásokat tekintjük. Deformációk esetében az egységnyi felületre ható nyomóerő a meghatározó, azaz a

nyomás:

$$p = \frac{F}{A},$$

mértékegysége: $[\text{Pa}] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}\right]$.

A nyomás skalármennyiség. A nyomásból származó erő mindig merőleges a felületre.

3A/K1 KÍSÉRLET: Gyurmadarabra egy vízzel teli ásványvizes palackot akasztunk először egy pánton, majd egy dróton, végül egy damilon. A pánt kicsit nyomódik a gyurmába, a drót jobban, míg a damil ketté is vágja. A teljes nyomóerő mindhárom esetben ugyanakkora, de az egységnyi felületre jutó nyomóerő, azaz a nyomás különbözik.

FELADAT:

3A/1. (MÁ 587.) Becsüljük meg az emberi tenyérre ható, a légnyomásból származó nyomóerőt normál légköri nyomás mellett!

<u>Megoldás</u>

A normál légköri nyomás $p_0 = 10^5$ Pa.

A tenyér felülete kb. $8\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 64\text{ cm}^2 = 6{,}4\cdot10^{-3}\text{ m}^2$.

$F_{ny} = p_0 A = 10^5 \cdot 6{,}4\cdot10^{-3} = 640\text{ N}$.

Sűrűség

Fajlagos mennyiség, térfogategységre vonatkoztatott tömeg.

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \text{mértékegysége} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right].$$

Egy nagyobb, inhomogén test esetén a teljes tömeggel és az össztérfogattal számolt m/V érték a test átlagsűrűségét adja meg. Egy megfelelően kis térfogatra számolt $\delta m/\delta V$ lokális sűrűség egy lokális jellemző, inhomogén testekben pontról pontra változhat. A gázok sűrűsége az állapothatározók függvénye, a térfogat a hőmérséklet és a nyomás függvénye.

FELADAT

3A/2. (MÁ 622.) Az ólom sűrűsége $11{,}3\cdot10^3\text{ kg/m}^3$, a viaszé $0{,}86\cdot10^3\text{ kg/m}^3$. Mekkora tömegű ólmot kell 105 cm^3 viaszhoz adagolnunk, hogy a test lebegjen az $1{,}04\cdot10^3\text{ kg/m}^3$ sűrűségű folyadékban?

<u>Megoldás</u>

$\rho_{Pb} = 11{,}3\cdot10^3\text{ kg/m}^3$; $\rho_v = 0{,}86\cdot10^3\text{ kg/m}^3$; $\rho_f = 1{,}04\cdot10^3\text{ kg/m}^3$;

$V_v = 105\text{ cm}^3 = 1{,}05\cdot10^{-4}\text{ m}^3$.

$m_{Pb} = ?$

Akkor lebeg az ólom és a viasz keveréke az adott sűrűségű folyadékban, ha az ólom és viasz keverékének átlagsűrűsége megegyezik a folyadék sűrűségével, $\rho_{átl} = \rho_f$.

$$\rho_{átl} = \frac{m_{Pb} + m_v}{V_{Pb} + V_v} = \frac{m_{Pb} + \rho_v \cdot V_v}{m_{Pb}/\rho_{Pb} + V_v},$$

tehát

$$\frac{m_{Pb} + \rho_v \cdot V_v}{m_{Pb}/\rho_{Pb} + V_v} = \rho_f \quad \rightarrow \quad m_{Pb} + \rho_v \cdot V_v = \rho_f \cdot m_{Pb}/\rho_{Pb} + \rho_f \cdot V_v \quad \rightarrow$$

$$m_{Pb} = \frac{(\rho_f - \rho_v) \cdot V_v}{1 - \frac{\rho_f}{\rho_{Pb}}} = 0{,}02082 \text{ kg} = 20{,}82 \text{ g}.$$

Nyomás nyugvó fluidumokban

Fluidum: folyadék, gáz.

Összefoglalva: nyugvó fluidumban (gázban, folyadékban) a nyomás gyengítetlenül terjed, a gravitáció hatásától eltekintve minden pontjában ugyanakkora. A fluidum egy adott pontjába helyezett felületen a nyomóerő a felületre merőleges, nagysága nem függ attól, hogy milyen irányba áll a felület.

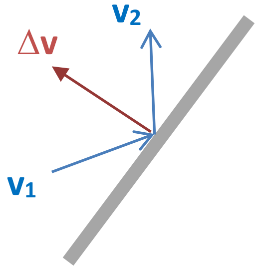
3A/K2 KÍSÉRLET: Kis pohárba vizet töltünk, egy papírlapot teszünk a tetejére, majd fejjel lefelé fordítjuk. A papírlap nem esik le, mert a légnyomás felfelé nyomja, mivel a felület lefelé irányul. (A lefelé irányuló papírlap a lentről nekiütköző részecskékre lefelé irányuló erőt fejt ki, és ezek ellenereje felfelé irányul, a részecskék felfelé irányuló erőt fejtenek ki a papírlapra.)

3A/K3 KÍSÉRLET: Kilyuggatott nylonzacskót bármely pontján nyomunk meg, az összes lyukon ugyanakkora sebességgel spriccel a víz, mivel a nyomás az egész zacskóban megnőtt, nem csak a megnyomás helyén. Az is látható, hogy a spriccelő vízsugarak minden lyukon a zacskó felületére merőlegesen indulnak el.

Kiegészítő magyarázat:

A részecskék véletlenszerűen mozognak különböző irányokba különböző nagyságú sebességgel. Ha egy részecske ütközik egy fluidumban levő felülettel, megváltozik a sebessége, és ennek következtében megváltozik az impulzusa:

$$\Delta \mathbf{I}_{1r} = m \cdot \Delta \mathbf{v}_{1r}$$



Ha az ütközés Δt idő alatt történik, akkor

$$\Delta \mathbf{I}_{1r} / \Delta t = m \cdot \Delta \mathbf{v}_{1r} / \Delta t, \quad \text{és} \quad \Delta \mathbf{v} / \Delta t = \mathbf{a}, \quad \text{tehát}$$

$$\Delta \mathbf{I}_{1r} / \Delta t = m \cdot \mathbf{a}_{1r};$$

Newton II. axiómája szerint pedig $m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$, tehát

$$\Delta \mathbf{I}_{1r} / \Delta t = \mathbf{F}_{1r}.$$

Egy részecske impulzusa a felület által rá kifejtett $\mathbf{F}_{1r}$ erő hatására változik meg. Milyen irányú ez az erő?

A felülettel való ütközés során a részecskék felülettel párhuzamos sebességkomponense nem változik, de a felületre merőleges sebességkomponens az ellentettjére változik. Mivel $\Delta\mathbf{v}_{1r}$ merőleges a felületre, ezért a felület által kifejtett $\mathbf{F}_{1r}$ erő is merőleges a felületre.
Adott felülettel sok részecske ütközik, ezek összege adja a nyomóerőt, és a felületegységre vett átlaga adja a nyomást. Mivel a felület által az egyes részecskékre kifejtett nyomóerő iránya nem függ attól, hogy milyen irányból érkezett a részecske, hanem minden részecskére a felületre merőleges irányú erő hat, így a felület által kifejtett nyomóerő mindig merőleges a felületre.

A fluidum egy adott pontján különböző irányú felületeket felvéve vajon változik-e a nyomóerő nagysága? Nyugvó fluidumban a részecskék sebességének eloszlása iránytól független, tehát a felületet bármely irányba forgatva azt tapasztaljuk, hogy a nyomóerő azonos nagyságú. Tetszőleges irányú felülettel ugyanakkora nyomást kapunk, egy adott pontban a nyomás nagysága a felület irányától független. A fluidum egy pontját tehát ez a nyomás jellemzi, ami skalármennyiség, nincs iránya. Az adott pontban fellépő nyomóerő irányát pedig az fogja megadni, hogy benne milyen irányú felületet veszünk fel.

Nyugvó fluidum minden része nyugalomban van, ezért benne a nyomás gyengítetlenül terjed. Ha a gravitációtól eltekintünk, akkor a fluidum minden részében ugyanakkora a nyomás.

<u>Hidrosztatikai nyomás</u>

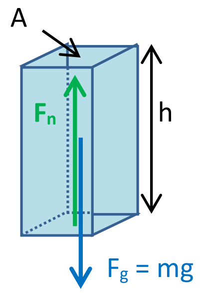
Összefoglalva: a gravitáció miatt folyadékok belsejében a hidrosztatikai nyomás a szabad felszín alatt h mélységben

$$p = \rho\, g\, h + p_0\,,$$

ahol p_0 a szabad felszín feletti légköri nyyomás.
A folyadék belsejében egy adott vízszintes síkban mindenhol ugyanaz a nyomás, akkor is, ha egy ferde falú edényben valamelyik pont felett rövidebb a folyadékoszlop.

3A/K4 KÍSÉRLET: Felfelé keskenyedő edénybe vizet öntünk. Az edény alja két helyen át van fúrva, és egy-egy cső jön ki belőle közlekedőedényként: az egyik a közepéből, ahol a legmagasabb felette a vízoszlop, a másik a széléből, ahol alig van felette víz. Mindkét csőben azonos magasságú a vízoszlop.

Kiegészítő magyarázat:
Az egymás felett levő folyadékrétegek egymást tartják meg. Gondolatban vágjunk körül egy h magasságú, A keresztmetszetű folyadékhasábot, aminek teteje éppen a folyadék felszínén van. Ez a folyadékhasáb nyugalomban van, tehát az alatta levő folyadékréteg által a folyadékhasábra kifejtett nyomóerő egyenlő a folyadékhasábra ható nehézségi erővel:



$$F_{ny} = F_g = mg.$$

A folyadékhasáb tömegét írjuk fel a sűrűségével:

$$m = \rho V = \rho\, Ah.$$

A folyadékhasáb aljánál, a felszín alatt h mélységben a nyomás

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho A h g}{A} = \rho g h \, .$$

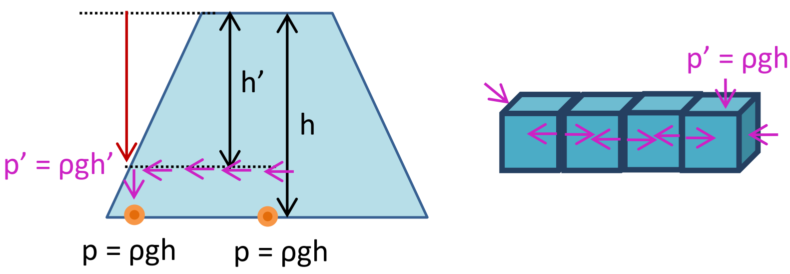
Ez a nyomás nem tartalmazza a folyadékhasáb felszínén uralkodó nyomást.
A felszín felett **p_0 légköri nyomás**t figyelembe véve a nyomóerő

$$F_{ny} = mg + p_0 A \, ,$$

a hidrosztatikai nyomás a szabad felszín alatt h mélységben

$$p = \rho g h + p_0 \, .$$

A kísérlet azt mutatja, hogy a hidrosztatikai nyomás nem csak a felette levő vízoszlop magasságától függ. A szélső ponton az alacsonyabb vízoszlop felett az edény fala közvetíti azt a nyomást, ami abban a magasságban uralkodik az edény közepén levő magasabb vízoszlop miatt. A hidrosztatikai nyomás az edény aljának minden pontján megegyezik, mivel tudjuk, hogy a folyadék nyugalomban van, tehát azonos magasságban nem lehetnek benne nyomáskülönbségek, mert akkor az abból származó oldalirányú erők áramlást indítanának el.



Hidrosztatikai felhajtóerő

Összefoglalva: a fluidumban elmerülő, vagy annak tetején úszó testre hat a hidrosztatikai felhajtóerő, ennek nagysága:

$$F_{fel} = \rho_f V_{bemerülő} \, g \, ,$$

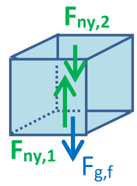
ahol $V_{bemerülő}$ a test fluidumba merülő részének térfogata.
A test

- lesüllyed, ha $\rho_{test} > \rho_f$;
- lebeg, ha $\rho_{test} = \rho_f$;
- felemelkedik, ha $\rho_{test} < \rho_f$.

3A/K5 KÍSÉRLET: Pingponglabda átlagsűrűsége sokkal kisebb, mint a víz sűrűsége, nehezen nyomható le a víz alá, és gyorsan felmegy a víz tetejére, ahol úgy úszik, hogy térfogatának nagy része kinn van a vízből. A jég sűrűsége is kisebb, mint a vízé, de közelebb van hozzá; a jég is felúszik a víz tetejére, ahol úszik, de a térfogatának nagyobb része a víz alatt van.

Kiegészítő magyarázat:
Írjuk fel, milyen erők hatnak egy nyugvó folyadék belsejében levő térfogatelemre!
Az egyszerűség kedvéért nézzünk egy kis kockát.
Mivel a folyadék nyugalomban van (sztatika), minden térfogatrészre az erők eredője zérus kell legyen. Az oldalirányú, vízszintes erők eredőjével már feljebb foglalkoztunk (és megállapítottuk, hogy a nyomás azonos magasságban levő térfogatelemeken megegyezik). A függőleges erőket tekintve a kis kockát lentről nyomja az alatta levő térfogatelem $F_{ny,1}$ erővel, fentről nyomja a felette levő térfogatelem $F_{ny,2}$ erővel, és hat rá az $F_{g,f}$ nehézségi erő. A 3 erő eredője zérus:

$F_{ny,1} - F_{ny,2} - F_{g,f} = 0$ (a felfelé mutató irány a pozitív irány).



Az alsó felületen ható felfelé mutató $F_{ny,1}$ nyomóerő nagyobb kell legyen, mint a felső felületen ható lefelé mutató $F_{ny,2}$ nyomóerő, a két nyomóerő eredője

$F_{ny,1} - F_{ny,2} = F_{ny,e}$

tehát felfelé mutat, és ezt nevezzük felhajtóerőnek.
Az F_{fel} felhajtóerő nagysága egyenlő a folyadékelemre ható nehézségi erővel:

$F_{fel} = F_{g,f}$.

A nehézségi erőt kifejezhetjük a folyadék ρ_f sűrűségével:

$F_{g,f} = m_f g = \rho_f V g$,

tehát a felhajtóerő nagysága

$F_{fel} = \rho_f V g$.

Ugyanez a felhajtóerő hat erre a V térfogatrészre akkor is, ha ott nem a folyadék, hanem más test található. Mivel a folyadék helyét elfoglaló testre ható $F_{g,test}$ nehézségi erő

$F_{g,test} = m_{test} g = \rho_{test} V g$ (inhomogén test esetén ρ_{test} a test átlagsűrűsége),

ezért a test

lesüllyed, ha $\rho_{test} > \rho_f$;
lebeg, ha $\rho_{test} = \rho_f$;
felemelkedik, ha $\rho_{test} < \rho_f$.

A fluidum tetején úszó test esetén a rá ható felhajtóerő nagyságát a bemerülő részének térfogatával kell számolni:

$F_{g,test} = F_{fel}$: $\rho_{test} V_{test} g = \rho_f V_{bemerülő} g$.

Plusz feladat:
3A/3. (MÁ 596.) Kocka alakú edényt ismeretlen sűrűségű folyadékkal töltünk meg. Mekkora nyomóerő hat az edény oldallapjaira?

<u>Megoldás</u>
Jelölje a kocka élhosszát ’a’.
A folyadék fölött levő levegő nyomásától eltekintünk, csak a folyadék által a kocka oldallapjára kifejtett nyomóerő nagyságát számoljuk ki. Ez a nyomás a hidrosztatikai nyomásból származik, ami a felszíntől lefelé mért h magassággal lineárisan nő:

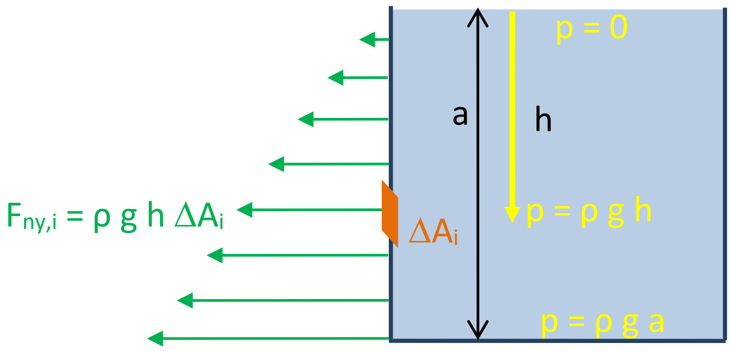
$p(h) = \rho\, g\, h$

Egy adott magasságban levő ΔA_i felületelemre a nyomásból származó nyomóerő

$$F_{ny,i}(h) = p(h) \cdot \Delta A_i = \rho\, g\, h \cdot \Delta A_i,$$

és a teljes felületre ható nyomóerő ezeknek az összege:

$$F_{ny} = \textstyle\sum_i F_{ny,i}\ .$$

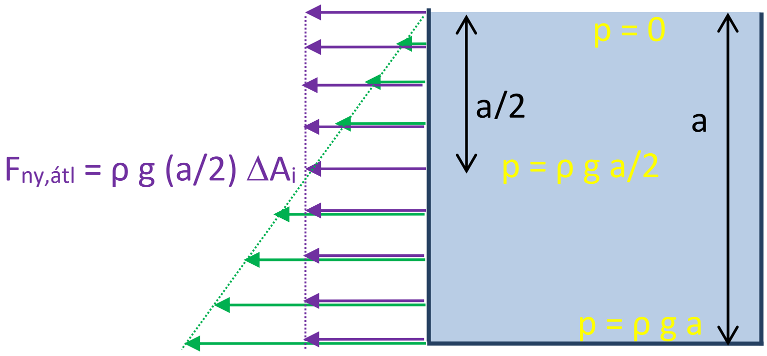


Ezt az összeget kiszámolhatjuk úgy, hogy észrevesszük, hogy a lineáris változás miatt az alsó és felső pontokról haladva közép felé két nyomás átlaga mindig azt a nyomást adja, ami a kocka oldallapjának fele magasságában lép fel:

$$p_{átl} = \rho\, g\, (a/2),$$

tehát az átlagos nyomóerő

$$F_{ny,átl} = \rho\, g\, (a/2) \cdot \Delta A_i.$$



Ezt felhasználva

$$F_{ny} = \textstyle\sum_i F_{ny,i} = \sum_i p_{átl}\, \Delta A_i = p_{átl} \sum_i \Delta A_i = p_{átl} \cdot A = p_{átl} \cdot a^2,$$

mivel a felületelemek összege a kocka oldallapját adja, aminek területe $A = a^2$.

Behelyettesítve $p_{átl}$ értékét

$$F_{ny} = \rho\, g\, (a/2) \cdot a^2 = ½\, \rho\, g\, a^3.$$

Ebben felismerhetjük, hogy

$$\rho\, a^3 = \rho\, V = m$$

éppen a kockába töltött folyadék tömege, ezzel kifejezve tehát

$$F_{ny} = ½\, mg$$

nagyságú nyomóerő hat a kocka egy oldallapjára.