1. TÉMAKÖR: KINEMATIKA

2. GYAKORLAT

Függőleges hajítás, szabadesés

A földfelszín közelében a nehézségi erő miatt minden testnek állandó nagyságú gyorsulása van függőlegesen lefelé, ezért a függőleges hajítás és a szabadesés egyenletesen változó mozgás.
Az összes számolási feladatban $g = 10\ m/s^2$ értékkel számolunk.

A függőleges koordinátára a szokásos jelölés nem x, hanem z (ill. lehet y is, de a Fizika1 – Mechanika tárgy számolási feladataiban is z fogja jelölni).
A z tengely felfelé mutat, ezért $a = -g$. A kezdősebesség és a pillanatnyi sebesség előjele attól függ, hogy a test felfelé vagy lefelé mozog: felfelé pozitív, lefelé negatív.
Ezzel tehát $v(t) = v_0 - gt$ és $z = z_0 + v_0t - ½gt^2$
Szabadesésnél $v_0 = 0$, ezért $v(t) = -gt$ és $z = z_0 - ½gt^2$.

FELADATOK

1B/1. (MÁ 94.) Legalább milyen hosszú ejtőzsinórt kell készítenünk, ha 5 koppanást szeretnénk hallani egyenletes időközönként, és az első golyót a fémlemeztől 7 cm távolságra rögzítettük?

Megoldás

Az összes golyó szabadesést végez adott magasságból, tehát $z_i = z_{0i} - ½gt_i^2$, $i = 1 \dots 5$.
z_{0i} a kiindulási magasság a fémlemezhez képest, vagyis a golyók akkor koppannak, amikor $z_i = 0$, tehát a kiindulási magasságok az esés idejével kifejezve: $z_{0i} = ½gt_i^2$.
A koppanásoknak egyenletesen kell követniük egymást:
$t_2 = t_1 + t_1 = 2\ t_1$, $t_3 = t_2 + t_1 = 3\ t_1$, … , általánosan $t_i = i \cdot t_1$ (t_1 a legalsó golyó leesésének ideje).
Ebből kifejezhetjük a z_{0i} kiindulási magasságok arányát:
$z_{0i} = ½g \cdot (i \cdot t_1)^2 = i^2 \cdot ½gt_1^2 = i^2 \cdot z_{01}$.
A golyóknak tehát négyzetesen növekvő magasságból kell indulniuk.
A legalsó golyó 7 cm magasról indul: $z_{01} = 0{,}07$ m $\rightarrow$ a második golyó $z_{02} = 2^2 \cdot 0{,}07 = 0{,}28$ m magasról, a harmadik golyó $z_{03} = 3^2 \cdot 0{,}07 = 0{,}63$ m magasról, a negyedik golyó $z_{04} = 4^2 \cdot 0{,}07 = 1{,}12$ m magasról, és az ötödik golyó $z_{05} = 5^2 \cdot 0{,}07 = 1{,}75$ m magasról.
[Nem kérdés, de kiszámolhatjuk a koppanások között eltelt időt:
$z_{01} = ½gt_1^2 = 0{,}07$ m $\rightarrow$ $t_1 = 0{,}12$ s.]
1B/K1 KÍSÉRLET: Kötélre egyenletes távolságban, ill. négyzetesen növekvő távolságban fűzünk fel anyacsavarokat, és leejtve megfigyeljük az anyacsavarok koppanása között eltelt időt. Füllel is érzékelhető a különbség, de a hangot rögzíthetjük is (pl. Audacity), és onnan leolvasható a koppanások között eltelt idő.

1B/2. (MÁ 108.) Egy lift 14,7 m/s sebességgel süllyed. A lift mellett leejtünk egy követ.
a) Mikor és hol találkozik a lift a kővel, ha elég hosszú még lefelé a liftakna?
b) Mikor egyenlő a kő és a lift sebessége?

<u>Megoldás</u>

A lift és a kő helyét kell az idő függvényében felírni arra ügyelve, hogy azonos koordinátarendszerben adjuk meg a helyüket. A z = 0 helyet mi választhatjuk meg úgy, hogy a legegyszerűbb legyen a számolás: legyen pl. az a hely, ahonnan indul a lift és a kő. Így az egyenletesen süllyedő liftre $z_{lift}(t) = v_{lift}t$ (ahol $v_{lift} = -14{,}7$ m/s, mert lefelé mozog), és a szabadesést végző kőre $z_{kő}(t) = -½gt^2$.

a) Akkor találkoznak, ha $z_{lift}(t^*) = z_{kő}(t^*)$, vagyis $v_{lift}t^* = -½gt^{*2}$.
A $t^*_1 = 0$ megoldás a közös kiindulási állapotra vonatkozik. A másik megoldás $t^*_2 = -2v_{lift}/g = -2\cdot(-14{,}7)/10 = 2{,}94$ s , ekkor éri utol a kő a liftet.
A találkozás helye kiszámolható bármelyik z(t) függvénybe való behelyettesítéssel:
$z^* = v_{lift}\, t^*_2 = -14{,}7\cdot 2{,}94 = -43{,}22$ m, ill. $z^* = -½gt^*{}_2{}^2 = -0{,}5\cdot 10\cdot 2{,}94^2 = -43{,}22$ m;
tehát 43,22 m-rel lejjebb találkoznak.

b) A lift sebessége konstans: $v_{lift} = -14{,}7$ m/s , a kőé pedig egyenletesen nő: $v_{kő}(t) = -gt$.
$v_{kő}(t') = v_{lift}$, ha $-gt' = v_{lift}$ $\rightarrow$ $t' = -v_{lift}/g = -(-14{,}7)/10 = 1{,}47$ s.
[Egyébként ekkor nincsenek egymás mellett, a lift $z_{lift}(t') = -14{,}7\cdot 1{,}47 = -21{,}61$ m-nél, a kő pedig $z_{kő}(t') = -0{,}5\cdot 10\cdot 1{,}47^2 = -10{,}80$ m-nél van (még nem érte utol a liftet).]

<u>Ferde hajítás</u>

Ha távolabbról nézzük, ahogy egy egyenletesen haladó teherautó platóján valaki leejt egy testet, vagy függőlegesen felfelé ill. lefelé elhajít, akkor azt látjuk, hogy a függőleges mozgás közben vízszintes irányban is elmozdul a test egyenletes sebességgel. Hasonló mozgás jön létre akkor is, ha a testet úgy hajítjuk el, hogy mi adunk a testnek vízszintes irányú sebességet. Ez a vízszintes irányú sebesség nem fog változni, mert a test g gyorsulása függőleges, és mivel a g gyorsulásnak nincs vízszintes komponense, ezért a sebesség vízszintes komponense állandó marad.

1B/K2 KÍSÉRLET: Két test egy időben indul azonos magasságból: az egyik vízszintes kezdősebességgel, a másik kezdősebesség nélkül szabadon esik. Egyszerre érnek földet, ami azt mutatja, hogy a vízszintesen meglökött test vízszintes irányú elmozdulása nem befolyásolja a függőleges irányú mozgását, a vízszintes és a függőleges irányú mozgások egymástól függetlenek.

A ferde hajítás tehát egy vízszintes irányú egyenletes mozgás és egy függőleges irányú egyenletesen változó mozgás eredője.

<u>Képletek:</u>

A mozgás az x – z síkban történik, a z tengely felfelé mutat.

A test gyorsulásának komponensei:

vízszintes: $a_x = 0$;

függőleges: $a_z = -g$.

A kezdősebesség nagysága v_0, a vízszintessel α szöget zár be. α pozitív, ha ferdén felfelé hajítunk, ill. α negatív, ha ferdén lefelé hajítunk. Ebből a kezdősebesség komponensei:
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$.

A test sebességének komponensei:

vízszintes: $v_x = v_{0x} = \text{konst.}$;

függőleges: $v_z = v_{0z} - gt$.

Ha $v_z>0$, akkor a test emelkedik, ill. ha $v_z<0$, akkor a test esik lefelé. Mivel gt előjele negatív, egy idő után v_z előjele akkor is negatív lesz (azaz esik lefelé), ha v_{0z} pozitív volt (felfelé dobtuk el a testet). Az előjelek alkalmazásával a hajítás felfelé ill. lefelé mutató szakasza egyben kezelhető.

A test helyvektorának komponensei:

vízszintes: $x = x_0 + v_{0x}t$;

függőleges: $z = z_0 + v_{0z}t - ½gt^2$.

Ezek alapján belátható, hogy a hajítás pályája egy parabola (most nem vezetjük le).

1B/K3 KÍSÉRLET: A locsolókannából kifolyó víz által leírt pálya parabola.

1B/K4 KÍSÉRLET: A slagból kilövő víz által leírt pálya parabola.

<u>Speciális esetek:</u>

Függőleges hajítás:

sebessége: vízszintes: $v_x = 0$; függőleges: $v_z = v_0 - gt$;

helyének komponensei: vízszintes: $x = x_0$; függőleges: $z = z_0 + v_0t - ½gt^2$.

Vízszintes hajítás:

sebessége: vízszintes: $v_x = v_0 = \text{konst.}$; függőleges: $v_z = -gt$;

helyének komponensei: vízszintes: $x = x_0 + v_0t$; függőleges: $z = z_0 - ½gt^2$.

FELADATOK

1B/3. (MÁ 132.) Egy testet 25 m/s kezdősebességgel, 60°-os szögben ferdén elhajítunk. Hol van 2 s múlva, és mekkora a sebessége?

<u>Megoldás</u>

A test helyének vízszintes koordinátája $x = x_0 + v_{0x}t$, függőleges koordinátája $z = z_0 + v_{0z}t - ½gt^2$.

x_0 és z_0 választható zérusnak.

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 25\cdot\cos60^\circ = 12{,}5$ m/s; $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 25\cdot\sin60^\circ = 21{,}65$ m/s, tehát
$x(t) = 12{,}5t$ és $z(t) = 21{,}65t - 5t^2$.

Behelyettesítve t = 2 s-ot $x(2) = 12{,}5\cdot2 = 25$ m; $z(2) = 21{,}65\cdot2 - 5\cdot2^2 = 23{,}30$ m.

A test tehát vízszintesen mérve 25 m-t távolodott az elhajítás helyétől, és 23,30 m-rel van magasabban annál a magasságnál, ahonnan elhajították.

A test sebességének komponensei $v_x = v_{0x} = 25 \cdot \cos 60° = 12{,}5$ m/s (állandó), és
$v_z(t) = v_{0z} - gt = 25 \cdot \sin 60° - 10t = 21{,}65 - 10t$,
ami t = 2 s-nál $v(2) = 21{,}65 - 10 \cdot 2 = 1{,}651$ m/s (pozitív, tehát a test még emelkedik).
[Hogy miért nem 1,65 m/s-ot írunk? Mert kerekítésnél a számokat 4 értékes jeggyel írjuk le, a számolásokban viszont mindig a pontos értéket visszük tovább. A $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 25 \cdot \sin 60°$ értéke pontosabban megadva 21,65063509 m/s, ami 4 értékes jegyre kerekítve 21,65 m/s, viszont a $v(2) = 25 \cdot \sin 60° - 10 \cdot 2$ értéke pontosabban 1,650635095 m/s, ami 4 értékes jegyre kerekítve 1,651 m/s.]
A test sebességének nagysága Püthagorasz-tétellel: $v(2) = \sqrt{(12{,}5^2 + 1{,}651^2)} = 12{,}61$ m/s.

1B/4. (MÁ 127.) Egy testet 60°-os szögben ferdén elhajítunk 25 m/s kezdősebességgel.
a) Mikor ér a pálya tetőpontjára?
b) Milyen magasan van a tetőpont?
c) Mikor ér újra az elindítás magasságába?
d) Milyen távol ér újra az elindítás magasságába?
<u>Megoldás</u>
a) A test az elhajítás után egy ideig emelkedik, vagyis a sebességének a függőleges komponense pozitív, majd a pálya tetőpontját elérve esni kezd, vagyis a sebességének a függőleges komponense negatív lesz. A pálya tetőpontján akkor van a test, amikor a sebességének a függőleges komponense zérus. (A test nem áll meg a pálya legfelső pontján, mert a vízszintes sebessége állandó; csak a függőleges sebessége lesz egy pillanatra zérus.)
$v_z(t) = v_{0z} - gt = v_0 \sin\alpha - gt = 25 \cdot \sin 60° - 10t = 21{,}65 - 10t$;
$v_z(t_h) = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = v_{0z}/g = 2{,}165$ s.
b) A test helyének függőleges koordinátája $z = z_0 + v_{0z}t - ½gt^2$.
z_0 választható zérusnak; $z(t) = v_{0z}t - ½gt^2 = v_0 \sin\alpha - ½gt^2 = 21{,}65t - 5t^2$.
A pálya csúcspontjának a magasságát úgy kapjuk meg, hogy ebbe behelyettesítjük t_h értékét:
$h = z(t_h) = 21{,}65t - 5t_h^2 = 21{,}65 \cdot 2{,}165 - 5 \cdot 2{,}165^2 = 23{,}44$ m.
[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és h-t kifejezzük a kezdősebességgel:
$h = v_{0z}t_h - ½gt_h^2 = v_{0z} \cdot v_{0z}/g - ½g\,(v_{0z}/g)^2 = ½v_{0z}^2/g = 0{,}5 \cdot (25 \cdot \sin 60°)^2/10 = 23{,}44$ m.]
c) Amikor a test az elhajítás magasságába ér, akkor ugyanakkora a z koordinátája, mint az elhajításkor ($z_0 = 0$ volt a választásunk), tehát
$z(t_d) = v_{0z}t_d - ½gt_d^2 = 21{,}65t_d - 5t_d^2 = 0 \quad \rightarrow$
ennek egyik megoldása $t_d = 0$, ami az indulás időpontja,
másik megoldása $t_d = 2v_{0z}/g = 4{,}330$ s.
Vegyük észre, hogy ez az idő kétszerese annak az időnek, amennyi alatt a test a pálya csúcspontjára ért, mivel a pálya szimmetrikus.
d) Amikor a test azonos magasságba ér az elhajítás magasságával, akkor az elhajítás helyétől mért távolsága megegyezik az x koordinátájának változásával. (A pálya minden más pontján a távolságot Püthagorasz-tétellel kellene számolni, mivel mindkét koordináta változik.)

$d = x(t_d) – x_0 = v_{0x}t_d = v_0\cos\alpha\cdot t_d$.
Behelyettesítve t_d értékét: $d = 25\cdot\cos60°\cdot4{,}330 = 54{,}13$ m.
[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és d-t kifejezzük a kezdősebességgel:
$d = v_{0x}\cdot t_d = v_{0x}\cdot(2v_{0z}/g) = v_0\cos\alpha\cdot2\cdot v_0 \sin\alpha/g = v_0^2\cdot\sin(2\alpha)/g = 25^2\cdot\sin120°/10 = 54{,}13$ m.]

Impulzus

1B/K5 KÍSÉRLET: Álló kiskocsinak ütközik egy másik kiskocsi v sebességgel, majd összetapadva mozognak tovább.*
Ha a két kiskocsi tömege megegyezik → az összetapadt kocsik sebessége ½ v.*
Ha a mozgó kiskocsira ráteszünk egy akkora tömeget, mint a kiskocsié, vagyis a mozgó kiskocsinak kétszer akkora a tömege, mint az állóé → az összetapadt kocsik sebessége ⅔ v.*
Ha az álló kiskocsira teszünk egy akkora tömeget, mint a kiskocsié, vagyis a mozgó kiskocsinak fele akkora a tömege, mint az állóé → az összetapadt kocsik sebessége ⅓ v.*
A kísérlet azt mutatja, hogy a két összetapadt test sebességét nem csak a mozgó test sebessége határozza meg, hanem a testek tömegei is.

IMPULZUS

a tömeg és a sebesség szorzata:
I = m **v**
vektormennyiség, iránya megegyezik **v** vektor irányával;
mértékegysége: [kg·m/s].

AZ IMPULZUS MEGMARAD az ütközések során.
Egyetlen magára hagyott test (ami nincs kölcsönhatásban semmivel) egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagyis úgy mozog, hogy sebességének se a nagysága, se az iránya nem változik, tehát a sebességvektora állandó, és így az impulzusa is állandó (nagysága és iránya is).
Két test kölcsönhatásba kerülhet egymással. Ekkor az egyes testek sebessége – és így impulzusa – megváltozhat, de a két test impulzusának az eredője (vektori összege) ugyanakkora az ütközés előtt és az ütközés után, tehát a kettőjük eredő impulzusa megmarad. Több testre is igaz, hogy az impulzusuk összege megmarad a kölcsönhatásuk előtti és utáni állapotot összehasonlítva. A testeket rendszernek tekintve az eredő impulzus megmarad.
Az impulzus megmaradásának az a feltétele, hogy olyan rendszert vizsgáljunk, ami nincs kölcsönhatásban a rendszeren kívüli testekkel.
Gyakorlati szempontból lehetséges, hogy a rendszer kölcsönhatásban van más testekkel (pl. a Föld vonzza, az asztal nyomja a testeket), de egyszerre több kölcsönhatás lép fel, amik kioltják egymást, az eredőjük nulla. Másrészt az is lehetséges, hogy nem nulla az eredő (pl. súrlódás miatt), de az ütközés olyan rövid ideig tart, hogy ennek a hatását elhanyagolhatjuk.

Az impulzus megmaradása alkalmazható
- ütközéseknél, ha két test összeragadva egy testként mozog tovább (rugalmatlan ütközés);
- a fordított jelenségnél: ha egy több testből álló rendszer több részre válik szét (pl. kocsiból kidobott tégla, robbanás, rakéta);
- és akkor is, ha ütközés után a két test külön testként mozog tovább.

1B/5. (MÁ 535.) Rugóval lökünk szét két golyót. Az egyik 1 kg és 8,75 m/s sebességű. A másik 3,7 m/s sebességet kapott. Mennyi ennek a golyónak a tömege?

Megoldás

Adatok:

Jelölje a testek tömegét m_A és m_B: $m_A = 1$ kg, $m_B = ?$;

a testek sebessége a szétlökődés előtt $v_{A1} = v_{B1} = 0$;

a testek sebességének nagysága a szétlökődés után $|v_{A2}|$ és $|v_{B2}|$:

$|v_{A2}| = 8{,}75$ m/s, $|v_{B2}| = 3{,}7$ m/s.

A két testből és a rugóból álló rendszer eredő impulzusa nem változik, miközben a rugó szétlöki őket. A rugó tömege elhanyagolható a testek tömegéhez képest, ezért a két test impulzusának összege egyezik meg a szétlökődés előtti és utáni állapotban.

A szétlökődés előtt a testek nyugalomban vannak, tehát az eredő impulzus zérus:

$\mathbf{I_1} = 0 = m_A\, \mathbf{v_{A1}} + m_B\, \mathbf{v_{B1}} = \mathbf{0}$.

A szétlökődés után az eredő impulzus:

$\mathbf{I_2} = m_A\, \mathbf{v_{A2}} + m_B\, \mathbf{v_{B2}}$.

A sebességek egymással ellentétes irányúak (egydimenziós vektorok), az előjelük fogja mutatni a sebesség irányát. Ha az m_A tömegű test sebességének az irányát vesszük pozitívnak, akkor az m_B tömegű test sebessége negatív előjelű:

$v_{A2} = 8{,}75$ m/s; $v_{B2} = -3{,}7$ m/s (de természetesen választhatnánk a másik lehetőséget is).

Az impulzus-megmaradást felírva:

$\mathbf{I_1} = \mathbf{I_2}$: $m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = 0$

$\rightarrow$ $m_B = -(v_{A2} / v_{B2}) \cdot m_A$;

behelyettesítve

$m_B = -(8{,}75 / (-3{,}7)) \cdot 1 = 2{,}365$ kg.

1B/6. Vízszintes asztallapon levő, h = 24 cm magas emelvényre helyezünk egy ruhacsipeszbe fogott tárgyat. A ruhacsipesz tömege $m_A = 8{,}54$ g, a tárgyé $m_B = 18{,}07$ g (az adatok a feladat után következő kísérletből származnak). Szétlökődés után leesnek az asztalra. Hogyan aránylik egymáshoz a leesési helyeik emelvény aljától mért távolsága?

Megoldás

Az **1B/5.** feladathoz hasonlóan itt is teljesül az impulzus-megmaradás feltétele, tehát felírhatjuk, hogy $m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = 0$, mert a szétlökődés előtt a ruhacsipesz és a test nyugalomban voltak, tehát a belőlük álló rendszer eredő impulzusa zérus volt.

Szétlökődésük után rövid ideig (az emelvény széléig) mindkét test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, majd az emelvény szélét elérve vízszintes hajításnak megfelelő parabolapályán mozognak tovább.

Vizsgáljuk először a ruhacsipeszt. A vízszintes hajításának kezdősebessége megegyezik a szétlökődés utáni sebességével, azaz $v_{A,0,x} = v_{A2}$, és $v_{A,0,z} = 0$. A koordinátarendszer origóját az emelvény szélére választva a ruhacsipesz helyének koordinátái:
$x_A(t) = v_{A2}\, t$ és $z_A(t) = -\frac{1}{2}gt^2$.

Mivel a két test függőleges mozgása ugyanaz a szabadesés (bár ez lehet egymáshoz képest időben eltolva, ha nem egyszerre érkeznek az emelvény széléhez), ezért az emelvény szélétől ugyanaz a t_a idő alatt fog mindkettő az asztallapra érkezni. Ebből a leérkezési pont távolsága: $d_A = v_{A2} t_a$.

Megjegyzés: t_a értéke is kiszámolható. A fenti koordinátarendszerben ugyanis az asztallapra érkezéskor a test z koordinátája éppen –h, azaz: $z_A(t_a) = -\frac{1}{2}gt_a^2 = -h$, ahonnan az asztalra érkezéshez szükséges idő:

$$t_a = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}24\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m/s^2}}} = 0{,}2191\ \mathrm{s}.$$

Ez valóban nem függ a kezdősebességétől, emiatt a másik tárgy is ugyanennyi idő alatt ér le az asztalra.

Hasonlóan a csipeszbe fogott tárgy távolsága az asztalra érkezéskor: $d_B = |v_{B2}|\, t_a$.
Az abszolútértékjelre azért van szükség, mert ha feltesszük, hogy v_{A2} pozitív, akkor az impulzus-megmaradás miatt v_{B2}-nek negatívnak kell lenni (azaz az ellentétes irányba mutat), a távolságot viszont pozitívnak definiáljuk.

A két egyenletet elosztva egymással látható, hogy a két távolság hányadosa: $d_A/d_B = |v_{A2}/v_{B2}|$. Az ismeretlen sebességek aránya pedig az impulzus-megmaradásból számolható: $v_{A2}/v_{B2} = -m_B/m_A$, ezzel a távolságok aránya éppen a tömegek arányának reciproka: $d_A/d_B = m_B/m_A = 2{,}116$.

1B/K6 KÍSÉRLET: ruhacsipeszbe fogott ceruzahegyezőt helyezünk egy emelvény tetejére. A csipeszre ráütve szétlökődnek, és megmérjük az első asztallapon pattanásuk távolságát az emelvény aljának szélétől.

A videóból kikockázva ezek a távolságok d_A = 30 cm és d_B = 13 cm. Ezek hányadosa 2,308, ami közel van az imént kiszámolt 2,116-hoz.

Az elméletileg várt és a kísérletileg meghatározott hányadosok eltérésének oka a mérési hiba. Ez egyrészt áll az elméleti számolásban elhanyagolt jelenségek (pl. a súrlódás az emelvényen vagy a légellenállás) okozta eltérésből; másrészt a mérések leolvasási hibájából, ugyanis a viszonylag gyorsan mozgó testek az asztalon megpattannak, és nehéz szabad szemmel megállapítani ennek a pontos helyét, illetve a videón is két képkocka között ér az asztalra, emiatt a pontos helyet ekkor is csak becsülhetjük.

Vegyük észre, hogy itt éppen azokon a lépéseken mentünk keresztül, amiről az 1A anyag bevezetésében beszéltünk. Kiindultunk a kiskocsis ütközéses kísérletekből, ezek alapján bevezettük az impulzust, és megfogalmaztuk az erre vonatkozó megmaradási törvényt. Ennek, és a hajításról tanultaknak segítségével kiszámoltuk egy másik elrendezésben szétlökődő testek távolságának arányát, amit a második, ruhacsipeszes kísérlettel ellenőriztünk.

Plusz feladatok:

1B/7. (MÁ 544.) Terheléssel együtt 150 kg tömegű kocsi 10 m/s sebességgel halad. A kocsiból menetirányban kidobunk egy 30 kg tömegű ládát, a talajhoz viszonyított 15 m/s sebességgel. Mekkora a kocsi sebessége a láda kidobása után?

<u>Megoldás</u>

Adatok: $m_{láda}$ = 30 kg, m_{kocsi} = 150–30 = 120 kg;

a kidobás előtt a kocsi és a láda sebessége megegyezik, mivel a láda még a kocsin van:

$v_{kocsi,1} = v_{láda,1} = v_1 = 10$ m/s;

a kidobás után a láda sebessége a talajhoz képest: $v_{láda,2}$ = 15 m/s.

Kérdés a láda kidobása után a kocsi sebessége a talajhoz képest: $v_{kocsi,2}$ = ?

A kocsira és a ládára ható külső erők eredője zérus (a felület által kifejtett nyomóerő nagysága éppen megegyezik a nehézségi erővel), így tehát teljesül az impulzus-megmaradás feltétele. A kocsiból és a ládából álló rendszer eredő impulzusa nem változik, miközben a ládát kidobják.

Kidobás előtt:

$$I_1 = (m_{kocsi} + m_{láda}) \cdot v_1 = (120+30)\cdot 10 = 1500 \text{ kg}\cdot\text{m/s} ;$$

Kidobás után:

$$I_2 = m_{kocsi}\, v_{kocsi,2} + m_{láda}\, v_{láda,2} = 120\, v_{kocsi,2} + 30\cdot 15 = 120\, v_{kocsi,2} + 450 \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

$$I_2 = I_1 : \quad 120\, v_{kocsi,2} + 450 = 1500 \quad \rightarrow \quad v_{kocsi,2} = (1500–450) / 120 = 8{,}75 \text{ m/s} .$$

1B/8. (MÁ 538.) Álló vízben két csónak egyenletesen halad egymás felé. Sebességük külön-külön 0,6 m/s. Amikor egymás mellé érnek, az egyikről a másikra 60 kg tömegű testet tesznek át. Ezután a másik csónak eredeti irányában 0,4 m/s sebességgel halad tovább. Mekkora ennek a második csónaknak a tömege, ha a víz ellenállása elhanyagolható?

<u>Megoldás</u>

A két csónakból és a 60 kg tömegű testből álló rendszer eredő impulzusa állandó. A feladat megoldása szempontjából most lényegtelen, hogy mekkora tömegű csónakról került át a „másik" csónakra a 60 kg tömegű test, mert annak a csónaknak a további mozgásával nem foglalkozunk. Az viszont lényeges, hogy a 60 kg tömegű test mozgásban volt, és tudjuk a sebességét.

Adatok:

Az „másik" (ismeretlen $m_{csónak}$ tömegű) csónak sebessége
az átrakás előtt $v_{csónak,1}$ = 0,6 m/s volt,
az átrakás után $v_{csónak,2}$ = 0,4 m/s lett (lelassult, mert egy szemből érkező testet tettek rá).
Az m_{test} = 60 kg tömegű test sebessége
az átrakás előtt ellentétes irányú volt a csónakéval, sebességének nagysága 0,6 m/s volt, tehát $v_{test,1}$ = –0,6 m/s volt,
az átrakás után $v_{test,2}$ = 0,4 m/s lett (a csónakkal együtt halad).

Impulzus-megmaradást felírva a „másik" csónakból és az átrakott testből álló rendszerre:
az átrakás előtt:

$$I_1 = m_{csónak}\, v_{csónak,1} + m_{test}\, v_{test,1} = 0{,}6\, m_{csónak} + 60\cdot(-0{,}6) = 0{,}6\, m_{csónak} - 36\ ;$$

az átrakás után:

$$I_2 = m_{csónak}\, v_{csónak,2} + m_{test}\, v_{test,2} = 0{,}4\, m_{csónak} + 60\cdot 0{,}4 = 0{,}4\, m_{csónak} + 24\ .$$

$$I_1 = I_2 : \quad 0{,}6\, m_{csónak} - 36 = 0{,}4\, m_{csónak} + 24 \quad \rightarrow \quad 0{,}2\, m_{csónak} = 60 \quad \rightarrow \quad m_{csónak} = 300 \text{ kg}.$$

1B/9. (MÁ 541.) m_1 tömegű lapos kocsi a talajon nyugalomban van. m_2 tömegű személy (a talajon történő nekifutással) v sebességgel ráfut a kocsira, és ugyanilyen sebességgel fut le a kocsiról. Mi történik a kocsival? A kocsi és a talaj közötti súrlódástól eltekintünk.

<u>Megoldás</u>

A kocsiból és a futóból álló rendszerre alkalmazhatjuk az impulzus-megmaradást.
Három állapotot tudunk összehasonlítani:

1.) Mielőtt a futó fellép a kocsira:
  a futó sebessége: $v_{futó,1} = v$;
  a kocsi sebessége zérus: $v_{kocsi,1} = 0$.
2.) Miközben a futó a kocsin fut végig:
  a futó sebessége: $v_{futó,2}$ = ? ismeretlen;
  a kocsi sebessége: $v_{kocsi,2}$ = ? ismeretlen.
3.) Miután a futó végigfutott a kocsin:

a futó sebessége: $v_{futó,3} = v$ (ugyanolyan sebességgel fut, mint a kocsira futás előtt);
a kocsi sebessége $v_{kocsi,3}$ = ? ismeretlen.

A 2.) állapotról nem tudunk semmit, de az 1.) és 3.) állapotot össze tudjuk hasonlítani.

$I_1 = I_3$: $m_{futó} \cdot v + m_{kocsi} \cdot 0 = m_{futó} \cdot v + m_{kocsi} \cdot v_{kocsi,3} \quad \rightarrow \quad v_{kocsi,3} = 0$.

Mivel a futó sebessége a kocsin való átfutás előtt és után megegyezik, ezért a kocsi sebessége is meg kell egyezzen a futó áthaladása előtt és után.

[A kocsi közben elmozdul valamennyit, mert a 2.) szakaszban mozgásban volt.]

SZIMULÁCIÓ, AMIVEL ÉRDEMES JÁTSZANI:

Ütközések: https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/collision-lab

---

KIDOLGOZOTT GYAKORLÓ FELADATOK

1B/10. (MÁ 123.) Függőlegesen felfelé dobunk egy követ 20 m/s sebességgel.

a) Mekkora lesz a sebessége 3 s múlva?

b) Hol lesz ekkor a test?

c) Milyen irányban mozog ebben a pillanatban?

Megoldás

Függőleges hajítás

sebessége: $v_z(t) = v_0 - gt$ (vízszintesen $v_x = 0$);

z koordinátája (ha a kiinduló koordinátája z_0): $z(t) = z_0 + v_0 t - ½gt^2$ (és $x = x_0$).

Számolhatnánk úgy, hogy először kiszámoljuk, mennyi ideig emelkedik, és milyen magasra jut ezalatt, majd a maradék időre a pálya legmagasabb pontjáról induló szabadeséssel számolnánk tovább. Mivel azonban a sebességet a képletben előjeles mennyiségként kezeljük, a felfelé ill. lefelé irányuló mozgást egyben számolhatjuk: felfelé $v_z > 0$, lefelé $v_z < 0$, a legfelső ponton $v_z = 0$.

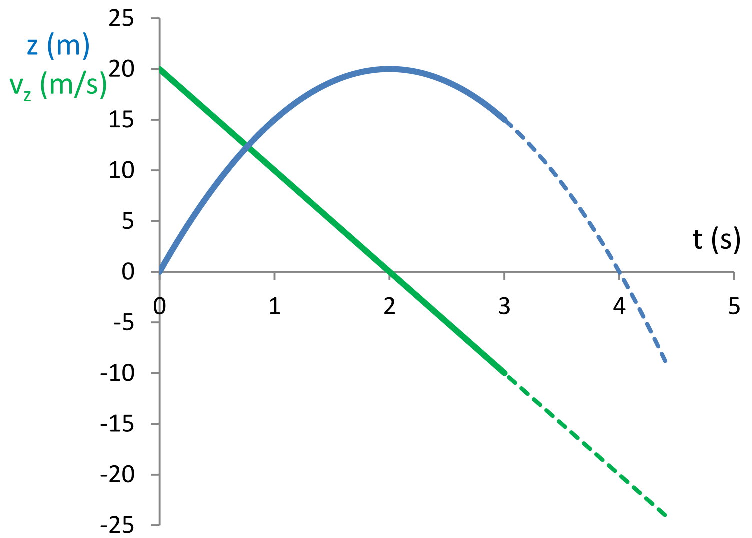
Adatok: v_0 = 20 m/s (pozitív, mert felfelé dobtuk el a testet); z_0 legyen 0

$\rightarrow \quad v(t) = 20 - 10t$; $z(t) = 20t - 5t^2$.

a) t = 3 s: $v(3) = 20 - 10 \cdot 3 = -10$ m/s.

c) v(3) előjele negatív $\rightarrow$ a test lefelé mozog.

b) $z(3) = 20 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 15$ m.



Nem volt kérdés, de kiszámolható az emelkedés ideje: $v(t_h) = 0$: $20 - 10t_h = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = 2$ s ;
ezalatt $z(t_h) = 20{\cdot}2 - 5{\cdot}2^2 = 20$ m magasra jutott, ez volt a maximális magasság.
Az ábrán látható, hogy a $v_z(t)$ függvény a $z(t)$ deriváltja, v_z aktuális értéke a $z(t)$ érintőjének meredekségével arányos:
$t = 2$ s-nál $z(t)$ érintője vízszintes $\rightarrow$ ekkor $v_z = 0$;
előtte $z(t)$ érintőjének meredeksége pozitív $\rightarrow$ $v_z > 0$;
utána $z(t)$ érintőjének meredeksége negatív $\rightarrow$ $v_z < 0$.

1B/11. (MÁ 536.) Egy összenyomott rugó 0,2 kg és 0,3 kg tömegű, eredetileg nyugvó kiskocsikat úgy lök szét, hogy azok 5 s alatt 60 cm távolságra jutnak egymástól. A rugó tömege és a súrlódás elhanyagolható. Mekkora a kocsik sebessége?

Megoldás

Az **1B/5.** feladathoz hasonlóan itt is teljesül az impulzus-megmaradás feltétele, tehát felírhatjuk, hogy $m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = 0$, mert a szétlökődés előtt a kocsik nyugalomban voltak, tehát a két kocsiból álló rendszer eredő impulzusa zérus volt. Itt azonban nem ismerjük sem az m_A, sem az m_B tömegű kocsinak a szétlökődés utáni sebességét (v_{A2}-t ill. v_{B2}-t), de tudjuk, hogy a megadott idő alatt összesen mennyit távolodtak egymástól ($d = 60$ cm-t).

Írjuk fel a testek x koordinátáját úgy, hogy a testek az origóból indulnak. Δt idő alatt
az m_A tömegű test az x_A koordinátájú pontba érkezik: $x_A = v_{A2}\,\Delta t$;
az m_B tömegű test az x_B koordinátájú pontba érkezik: $x_B = v_{B2}\,\Delta t$;
és a két test között távolság $d = |\,x_A - x_B\,| = |v_{A2} - v_{B2}|\cdot\Delta t$.
Ez érvényes tetszőleges irányú sebességekre, ha a sebességeket előjelesen kezeljük.
Jelen esetben ellenkező irányba mozognak a kocsik.
Válasszuk úgy az előjeleket, hogy $v_{A2} > 0$ és $v_{B2} < 0$, így $d = (v_{A2} - v_{B2})\cdot\Delta t$.

Két egyenletünk van tehát:

az impulzus-megmaradásra felírt $m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = 0$,
és az elmozdulásra felírt $d = (v_{A2} - v_{B2})\cdot\Delta t$.

Fejezzük ki a másodikból v_{A2} -t:

$v_{A2} = d / \Delta t + v_{B2}$,

és írjuk be az elsőbe:

$m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = m_A (d/\Delta t + v_{B2}) + m_B v_{B2} = m_A \cdot d/\Delta t + (m_A + m_B) v_{B2} = 0$

$\rightarrow \quad v_{B2} = -\frac{m_A}{m_A+m_B}\cdot\frac{d}{\Delta t}$.

Adatok: $m_A = 0{,}2$ kg; $m_B = 0{,}3$ kg; $\Delta t = 5$ s; $d = 60$ cm $= 0{,}6$ m.

Behelyettesítve

$v_{B2} = -\frac{0{,}2}{0{,}2+0{,}3}\cdot\frac{0{,}6}{5} = -0{,}4\cdot 0{,}12 = -0{,}048$ m/s $= -4{,}8$ cm/s,

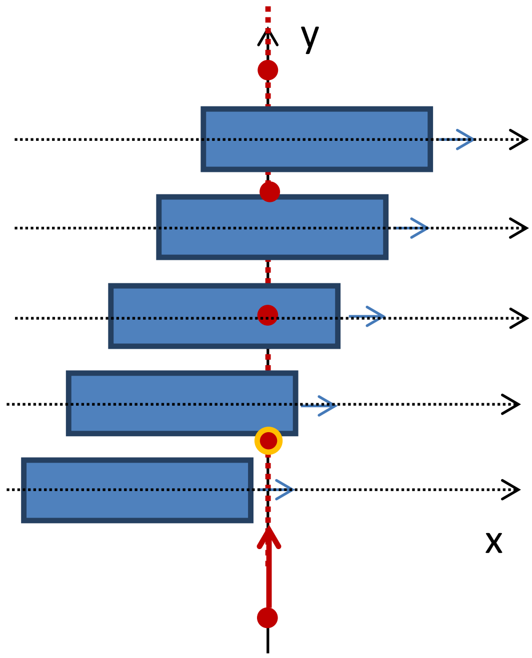
$v_{A2} = 0{,}12 + (-0{,}048) = 0{,}072$ m/s $= 7{,}2$ cm/s.

Mik a gyakorló feladatok a példatárból?

- az I/1. fejezet minden feladata, kivéve a csillagosok;
- az I/2. fejezet minden feladata, kivéve a csillagosok;
- az I/3. fejezet minden feladata, kivéve a csillagosok;
- az I/14. fejezetből: 526., 527., 534. (kivéve erőlökés), 537., 539., 540., 550.a), 555.

KIEGÉSZÍTŐ FELADATOK ÉRDEKLŐDŐKNEK

1B/12. (MÁ 6.) Egyenes pályán 36 km/h sebességgel haladó vasúti kocsi oldalait a pályára merőleges irányban kilőtt lövedék üti át. A kimeneti nyílás 5 cm-rel van eltolódva a menetiránnyal ellentétesen a bemeneti nyíláshoz képest. A kocsi falainak távolsága 2,5 m. Mekkora a lövedék sebessége?



Megoldás

A vonat az x tengely mentén halad egyenletes v_{vonat} sebességgel: $x(t) = x_0 + v_{vonat}\, t$;
a golyó az y tengely mentén halad egyenletes $v_{golyó}$ sebességgel: $y(t) = y_0 + v_{golyó}\, t$.
$v_{vonat} = 36$ km/h = 10 m/s.
Origónak válasszuk azt a pontot, amikor a golyó éppen eléri a vonatot.

t^* ideig tart, amíg a golyó áthalad a vonaton, ez alatt
a vonat $s_{vonat} = 5$ cm = 0,05 m-t halad: $s_{vonat} = \Delta x_{vonat}(t^*) = v_{vonat}\, t^*$;
a golyó által megtett távolság a vonat szélessége, $s_{golyó} = 2{,}5$ m: $s_{golyó} = \Delta y_{golyó}(t^*) = v_{golyó}\, t^*$.
A két egyenlet tehát $s_{vonat} = v_{vonat}\, t^*$ és $s_{golyó} = v_{golyó}\, t^*$.
Elosztva egymással a két egyenletet az idő kiesik:

$$\frac{s_{golyó}}{s_{vonat}} = \frac{v_{golyó}}{v_{vonat}},$$

amiből a golyó sebessége

$$v_{golyó} = (s_{vonat}/s_{golyó}) \cdot v_{vonat} .$$

Behelyettesítve

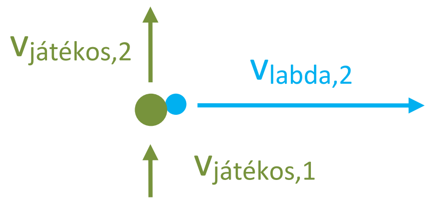
$$v_{golyó} = (2{,}5/0{,}05) \cdot 10 = 500 \text{ m/s}.$$

[Nem kérdés, de kiszámolható a közben eltelt idő: $t^* = 0{,}05$ m / (36/3,6 m/s) = 0,005 s.]

1B/13. (MÁ 525.) Gombfocijáték közben a 2 g tömegű labda és az 1,2 dkg tömegű játékos ütközik, és ezt követően a labda keleti irányban mozog 5 m/s, a játékos északra 0,5 m/s sebességgel.

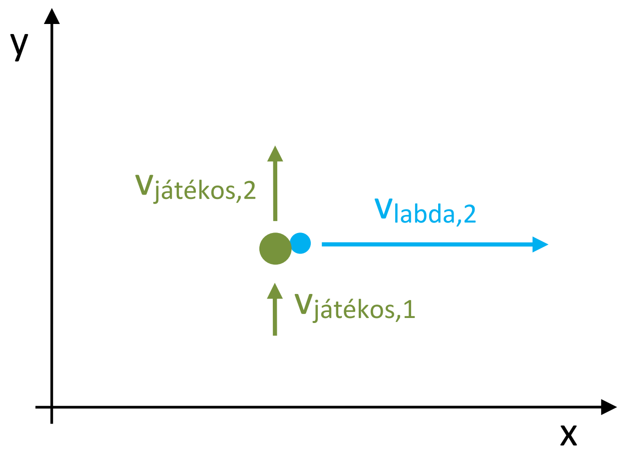
a) Mekkora és milyen irányú a játékosból és labdából álló rendszer impulzusa?

b) Ütközés előtt mekkora és milyen irányú volt a labda sebessége, ha a játékos sebessége az ütközés előtt $\frac{1}{6}$ m/s volt, és sebességének iránya nem változott az ütközés során?



Megoldás

A labdából és a játékosból álló rendszer impulzusa vektormennyiség, amit a labda ill. játékos egymásra merőleges sebessége alapján tudunk kiszámolni.



Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az x tengely mutat a keleti, és az y tengely az északi irányba.

Adatok: $m_{játékos} = 1{,}2$ dkg $= 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ kg; $m_{labda} = 2$ g $= 2 \cdot 10^{-3}$ kg;

a sebességek nagysága

ütközés után: $v_{játékos,2} = 0{,}5$ m/s; $v_{labda,2} = 5$ m/s;

ütközés előtt: $v_{játékos,1} = \frac{1}{6}$ m/s; $v_{labda,1} = ?$

a) Ütközés után

a labda x irányban mozog, az impulzusának nagysága

$I_{labda,2} = m_{labda}\, v_{labda,2} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 10 \cdot 10^{-3}$ kg·m/s;

a játékos y irányban mozog, az impulzusának nagysága

$I_{játékos,2} = m_{játékos}\, v_{játékos,2} = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 = 6 \cdot 10^{-3}$ kg·m/s.

Tudjuk tehát az impulzus komponenseit:

$I_{labda,2} = I_{x2}$ és $I_{játékos,2} = I_{y2}$,

és ebből kiszámolhatjuk az impulzus

nagyságát Püthagorasz-tétellel:

$I_2 = \sqrt{I_{x2}{}^2 + I_{y2}{}^2} = \sqrt{\left(10 \cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(6 \cdot 10^{-3}\right)^2} = 11{,}66 \cdot 10^{-3}$ kg·m/s ;

és az x tengellyel bezárt szögét:

$\mathrm{tg}\alpha_2 = I_{y2} / I_{x2} = 6 \cdot 10^{-3} / 10 \cdot 10^{-3} = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 30{,}96°$.

Az eredő impulzus tehát északkeleti irányba mutat, kelettel 30,96°-ot (északkal 59,04°-ot) zár be, és a nagysága $11{,}66 \cdot 10^{-3}$ kg·m/s.

b) Az impulzus-megmaradást vektor esetén komponensenként írhatjuk fel, vagyis az eredő impulzus megmaradása úgy teljesül, hogy mind a két komponense külön-külön megmarad: $I_{x1} = I_{x2}$ és $I_{y1} = I_{y2}$.

Általános esetben mind a két komponensben szerepelhet a labda és a játékos impulzusa is, ha a sebességek nem speciálisan x ill. y irányúak. Általánosan úgy kellett volna felírnunk az **a)** rész megoldását, hogy az ütközés előtt a játékos sebességének x komponense $v_{játékos,x1}$ és y komponense $v_{játékos,y1}$; illetve az ütközés után $v_{játékos,x2}$ és $v_{játékos,y2}$; és hasonlóan a labdára is, tehát az impulzus-megmaradás komponensekben felírva így néz ki:

$I_{x1} = I_{x2}$: $m_{játékos}\, v_{játékos,x1} + m_{labda}\, v_{labda,x1} = m_{játékos}\, v_{játékos,x2} + m_{labda}\, v_{labda,x2}$ és

$I_{y1} = I_{y2}$: $m_{játékos}\, v_{játékos,y1} + m_{labda}\, v_{labda,y1} = m_{játékos}\, v_{játékos,y2} + m_{labda}\, v_{labda,y2}$.

Mivel a feladatunkban
a játékos csak az y tengely mentén mozog az ütközés előtt és után is, így
$v_{játékos,x1} = 0$, $v_{játékos,x2} = 0$,
a labda az ütközés után csak az x tengely mentén mozog, így
$v_{labda,y2} = 0$,
ezért a feladat adatait pontosabban úgy kellett volna felírni, hogy
a sebességek komponensei
ütközés után: $v_{játékos,x2} = 0$; $v_{játékos,y2} = 0{,}5$ m/s; $v_{labda,x2} = 5$ m/s; $v_{labda,y2} = 0$;
ütközés előtt: $v_{játékos,x1} = 0$; $v_{játékos,y1} = \frac{1}{6}$ m/s; $v_{labda,x1} = ?$; $v_{labda,y1} = ?$

A nem-zérus tagok tehát

$I_{x1} = I_{x2}$: $m_{labda}\, v_{labda,x1} = m_{labda}\, v_{labda,x2}$ és

$I_{y1} = I_{y2}$: $m_{labda}\, v_{labda,y1} + m_{játékos}\, v_{játékos,y1} = m_{játékos}\, v_{játékos,y2}$.

Az x komponensből azt látjuk, hogy a labda ütközés előtti sebességének x komponense megegyezik az ütközés utánival: $v_{labda,x1} = v_{labda,x2} = v_{labda,2} = 5$ m/s.

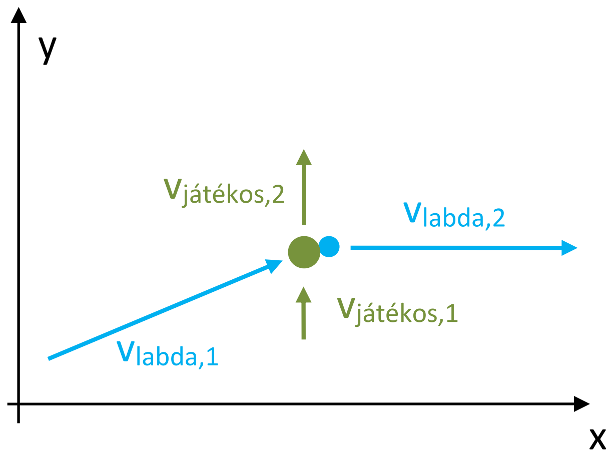
Ütközés előtt azonban a labda sebességének van y irányú komponense is, mert a játékos y irányú sebessége (és így impulzusa) megváltozik az ütközés során. Ezt kifejezhetjük a második egyenletből:

$v_{labda,y1} = (v_{játékos,y2} - v_{játékos,y1}) \cdot m_{játékos} / m_{labda}$.

Behelyettesítve

$v_{labda,y1} = (0{,}5 - \frac{1}{6}) \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2} / 2 \cdot 10^{-3} = 2$ m/s.

A labda elvesztette azt az y irányú sebességét, és az ennek megfelelő impulzusát átadta a játékosnak, aki ettől felgyorsult (a sebessége megnőtt $\frac{1}{6}$ m/s-ról 0,5 m/s-ra).



A komponensekből kiszámolhatjuk a labda ütközés előtti sebességének nagyságát Püthagorasz-tétellel:

$v_{labda,1} = \sqrt{v_{labda,x1}^2 + v_{labda,y1}^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5{,}385$ m/s ;

és az x tengellyel bezárt szögét:

$\mathrm{tg}\beta = v_{labda,y1} / v_{labda,x1} = 2 / 5 = 0{,}4 \quad \rightarrow \quad \beta = 21{,}80°$.

A sebessége tehát északkeleti irányba mutat, kelettel 21,80°-ot (északkal 68,20°-ot) zár be, és a nagysága 5,385 m/s.