Fizika 1 – Mechanika számolási gyakorlat zh3 2022. máj. 5. megoldás

1. Az úton gurul egy 48 kg tömegű lapos kiskocsi 5 m/s sebességgel. A kiskocsi mozgása súrlódásmentesnek tekinthető. Bodri, a 32 kg-os komondorkölyök hátulról utánafut 12 m/s sebességgel, amikor utoléri, felugrik rá, 10 métert utazik rajta, majd elrugaszkodik róla hátrafelé. A leugrása után a kiskocsi sebessége éppen a kétszeresére nő a kezdeti 5 m/s-nak.

a) Mennyi a kiskocsi sebessége, amikor Bodri felugrott rá? (1,5 p.)

b) Mekkora sebességgel ugrik el Bodri a kiskocsihoz képest, és mekkora Bodri sebessége a talajhoz képest a leugrás utáni pillanatban? (2 p.)

c) Mennyi a kiskocsi + Bodri összes mozgási energiája a felugrás előtt? (1 p.)

d) Mennyi a kiskocsi + Bodri összes mozgási energiája, amikor Bodri a kiskocsin van? (0,5 p.)

e) Mennyi a kiskocsi + Bodri összes mozgási energiája a leugrás után? (1 p.)

Megoldás:

a) Impulzusmegmaradást felírva:

$p_{össz}$ = 48·5 + 32·12 = 624 kg·m/s = (48+32)·$v_{közös}$ → $v_{közös}$ = 7,8 m/s.

b) $p_{össz}$ = 624 = 48·10 + 32 $v_{Bodri,\,talaj}$ → $v_{Bodri,talaj}$ = 4,5 m/s.

Pozitív, tehát abba az irányba halad, amerre eredetileg is futott.

$v_{Bodri,kiskocsi}$ = 4,5 – 7,8 = –3,3 m/s.

Tehát bodri 3,3 m/s nagyságú sebességgel rugaszkodott le hátrafelé a kiskocsiról.

c) $E_{kin,1} = ½\ 48·5^2 + ½\ 32·12^2 = 2904$ J.

d) $E_{kin,2} = ½\ (48+32)·7{,}8^2 = 2433{,}6$ J. Csökkent, mert rugalmatlan az ütközés.

e) $E_{kin,1} = ½\ 48·10^2 + ½\ 32·4{,}5^2 = 2724$ J. Nőtt, mert Bodri munkát végzett a leugráskor. (Tulajdonképpen egy rugalmatlan ütközés fordított irányban.)

2. Egy m_1 = 0,3 kg tömegű test nekimegy egy álló m_2 = 0,5 kg tömegű testnek, tökéletesen rugalmasan ütköznek, majd az m_1 test visszapattan és 1,2 m/s nagyságú lesz a sebessége. Az m_1 test ütközés után pontosan abba az irányba pattan vissza, amerről érkezett.

a) Mekkora volt az m_1 test sebessége az ütközés előtt?

Mekkora lesz az m_2 test sebessége az ütközés után? (3,5 p.)

b) Töltse ki az alábbi táblázatot:

Pozitív iránynak az m_1 test ütközés előtti sebességét vegye fel!

(4 p.)

Megoldás:

a) Jelölések: ütközés előtt $v_1 = –1{,}2$ m/s (és $u_2 = 0$); ütközés után m_1 sebessége v_1, m_2 sebessége v_2.

v_1 negatív, mert ütközéskor a sebessége ellentétes irányúra változik, és az ütközés előtti sebességet vesszük pozitívnak. Nem baj, ha az **a)** részben még nem így van felvéve az előjel, de a **c)** részben már ez van előírva.

Impulzus- és energiamegmaradást felírva:

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$½\, m_1 u_1^2 = ½\, m_1 v_1^2 + ½\, m_2 v_2^2$$

Egyenletrendezés:

$$m_1 (u_1 – v_1) = m_2 v_2$$

$$m_1 (u_1 – v_1)(u_1 + v_1) = m_2 v_2^2$$

Ezekből $u_1 + v_1 = v_2$, ezt beírva az első egyenletbe

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 u_1 + m_2 v_1$$

$$\rightarrow \quad u_1 = v_1 (m_1+m_2) / (m_1–m_2)$$

$$\rightarrow \quad v_2 = u_1 + v_1 = v_1 \cdot 2m_1 / (m_1–m_2)$$

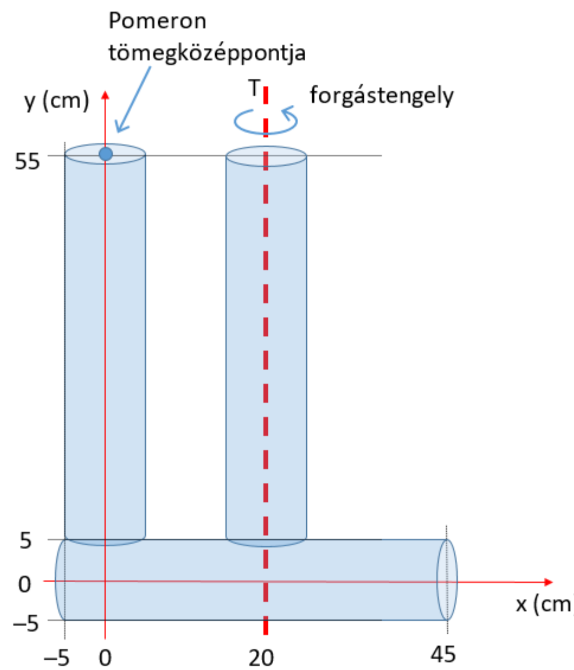
Behelyettesítve:

$u_1 = –1{,}2 \cdot (0{,}3+0{,}5) / (0{,}3–0{,}5) = 4{,}8$ m/s az m_1 test ütközés előtti sebessége,

$v_2 = –1{,}2 \cdot 2\cdot0{,}3 / (0{,}3–0{,}5) = 3{,}6$ m/s az m_2 test ütközés utáni sebessége.

	ütközés előtt	ütközés után
m_1 impulzusa	1,44 kg·m/s	–0,36 kg·m/s
m_2 impulzusa	0	1,80 kg·m/s
a két test összes impulzusa	1,44 kg·m/s	1,44 kg·m/s
m_1 mozgási energiája	3,456 J	0,216 J
m_2 mozgási energiája	0	3,240 J
a két test összes mozgási energiája	3,456 J	3,456 J

3. Az ábrán látható szerkezetet készítettük el 3 rúd összehegesztésével. Mindegyik rúd tömege 15 kg, hossza 50 cm, sugara 5 cm.
Pomeron ráült az egyik rúd végére, a tömegközéppontja az ábrán jelölt helyen van.
Pomeron tömege 5 kg.
$g = 10\ m/s^2$.



a) Számoljuk ki a szerkezet és Pomeron közös tömegközéppontjának koordinátáit az ábrán felvett koordinátarendszerben! (3 p.)

b) Az ábrán T-vel megjelölt forgástengelyre a szerkezet és a rajta ülő Pomeron együttes tehetetlenségi nyomatéka 1,6 kg·m^2. Mennyi Pomeron tehetetlenségi nyomatéka a saját tömegközéppontján átmenő tengelyre? (3 p.)

Rúd tehetetlenségi nyomatéka

a szimmetriatengelyére $\frac{1}{2}\, m\, R^2$,

a rúd felezőpontján átmenő merőleges tengelyre $\frac{1}{12}\, m\, L^2$.

c) A szerkezetet vízszintes helyzetbe fordítva a szerkezet a T forgástengely körül súrlódásmentesen el tud fordulni. Pomeron rajta ül a szerkezeten.
Abban a pillanatban, amikor a szerkezet a vízszintes kiindulási helyzethez képest 42°-kal van elfordulva, mekkora …

c1) … a szerkezet + Pomeron forgatónyomatéka a T tengelyre? (1,5 p.)

c2) … a szerkezet szöggyorsulása? (0,5 p.)

c3) … Pomeron gyorsulása? (0,5 p.)

c4) … a szerkezet szögsebessége? (2,5 p.)

c5) … Pomeron sebessége? (0,5 p.)

Megoldás: A három rudat számozzuk meg, legyen pl. az y tengelyen fekvő rúd R1, a T tengelyen fekvő rúd R2, az x tengelyen fekvő rúd R3.

a) Az egyes testek tömegközéppontja:

R1:	$x_1 = 0$,	$y_1 = 5+50/2 = 30$ cm $= 0{,}3$ m;
R2:	$x_2 = 20$ cm $= 0{,}2$ m,	$y_2 = y_1 = 0{,}3$ m;
R3:	$x_3 = 50/2–5 = 20$ cm $= 0{,}2$ m,	$y_3 = 0$;
Pomeron:	$x_P = 0$,	$y_P = 55$ cm $= 0{,}55$ m.

A rendszer tömegközéppontja:

$x_s = (0 \cdot 15 + 0{,}2 \cdot 15 + 0{,}2 \cdot 15 + 0 \cdot 5) / (15+15+15+5) = 0{,}12$ m

$y_s = (0{,}3 \cdot 15 + 0{,}3 \cdot 15 + 0 \cdot 15 + 0{,}55 \cdot 5) / (15+15+15+5) = 0{,}235$ m

b) Mivel a T tengely párhuzamos R1 és R2 szimmetriatengelyével, ezért ezeknek a rudaknak a saját tömegközéppontjukra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka

$\theta_{1,tkp} = \theta_{2,tkp} = ½\, mR^2 = 0{,}5 \cdot 15 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}01875$ kg·m².

R2 szimmetriatengelye éppen a forgástengelyen van, ennél a Steiner-tag 0, de R1 szimmetriatengelye 0,2 m-rel el van tolva a forgástengelyhez képest, ezért ennél a Steiner-tag

$\theta_{2,Steiner} = m_r\, d^2 = 15 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}6$ kg·m².

A harmadik rúd merőleges a forgástengelyre, ezért

$\theta_{3,tkp} = \frac{1}{12}\, mL^2 = 15 \cdot 0{,}5^2/12 = 0{,}3125$ kg·m²,

és mivel a T forgástengely éppen a rúd felezőpontján megy át, ezért a Steiner-tag 0.

Pomeronnak ismeretlen a saját tömegközéppontjára vonatkoztatott $\theta_{P,tkp}$ tehetetlenségi nyomatéka, és Pomeron tömegközéppontja 0,2 m távolságra van a T forgástengelytől, ezért a Steiner-tag

$\theta_{P,Steiner} = m_P\, d^2 = 5 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2$ kg·m².

Ezeknek az összege a rendszer tehetetlenségi nyomatéka a T tengelyre:

$\theta = 1{,}6$ kg·m² $= 2 \cdot 0{,}01875 + 0{,}6 + 0{,}3125 + \theta_{P,tkp} + 0{,}2 = 1{,}15 + \theta_{P,tkp} \quad \rightarrow \quad \theta_{P,tkp} = 0{,}45$ kg·m².

c1) A rendszer tömegközéppontjával számolva

$M = \Sigma m\, g\, k \cos\varphi$,

ahol k a tömegközéppont távolsága a T tengelytől: $k = 0{,}20 - 0{,}12 = 0{,}08$ m.

$M = 50 \cdot 10 \cdot 0{,}08 \cdot \cos 42° = 29{,}73$ Nm.

c2) $M = \theta\, \beta \quad \rightarrow \quad \beta = M / \theta = 29{,}73/1{,}6 = 18{,}59\ s^{-2}$.

c3) Pomeron r = 0,2 m távolságra van a forgástengelytől, tehát $a_P = r\, \beta = 0{,}2 \cdot 18{,}59 = 3{,}716$ m/s².

c4) Energiamegmaradással:

$E_{mech} = mgz + ½\, \theta\omega^2 =$ konst.

A helyzeti energia megváltozását leggyorsabban a tömegközéppont magasságának változásával fejezhetjük ki: $h = k \sin\varphi = 0{,}05353$ m.

A helyzeti energia zérus pontját a kiinduló magasságra felvéve az összes mechanikai energia zérus (mivel nyugalmi helyzetből indul a szerkezet). φ szöggel elfordulva a tömegközéppont h-val lejjebb került:

$0 = -\Sigma m\, g\, h + ½\, \theta\omega^2 = -50 \cdot 10 \cdot 0{,}05353 + 0{,}5 \cdot 1{,}6\, \omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = 5{,}784\ s^{-1}$.

c5) Pomeron r = 0,2 m távolságra van a forgástengelytől, tehát $v_P = r\, \omega = 0{,}2 \cdot 5{,}784 = 1{,}157$ m/s.