1. FELADAT

Lolka (m_L kg) és Bolka (m_B kg) ülnek egy kiskocsin, ami M kg tömegű. A kiskocsi a talajhoz képest v_0 sebességgel megy. Ekkor Lolka lelöki Bolkát Δt s alatt, ezután a kiskocsi a rajta maradt Lolkával együtt a talajhoz képest v_1 sebességgel megy tovább. A súrlódás elhanyagolható. Nem sokkal ezután Lolka leugrik a kiskocsiról, szintén Δt s alatt, ennek következtében a kiskocsi sebessége n-szeresére nő.
A válaszok megadásánál vegyünk figyelembe előjelet is! Pozitív iránynak tekintsük a kezdeti sebesség irányát.
m_L, m_B, M, v_0, v_1, Δt és n random generált értékek voltak.

Egyforma kérdések:
vegyészmérnököknek 1.a) és 2.b),
biomérnököknek 1.b) és 2.a).
Megoldás: impulzus-megmaradást felírva.

1.a) Mennyi Bolka sebessége a még a kiskocsin levő Lolkához képest, amikor Lolka lelöki a kocsiról? (4 pont)
Jelölje $v_{rel,B}$:
$(M+m_L+m_B)\,v_0 = (M+m_L)\,v_1 + m_B\,(v_0+v_{rel,B})$
$\rightarrow\ v_{rel,B} = (M+m_L)\,(v_0-v_1)\,/\,m_B$ Lolka eredeti sebességéhez képest
vagy:
$(M+m_L+m_B)\,v_0 = (M+m_L)\,v_1 + m_B\,(v_1+v_{rel,B})$
$\rightarrow\ v_{rel,B} = (M+m_L+m_B)\,(v_0-v_1)\,/\,m_B$ Lolka új sebességéhez képest
A Moodle eredetileg úgy volt beállítva, hogy csak az első választ fogadta el. Utólag beírtuk a másodikat is, ezt most kipipálja, de nem ad rá pontot, úgyhogy ezt a javítók fogják kézzel átírni.

1.b) Mennyi Bolka sebessége a talajhoz képest, amikor Lolka lelöki a kocsiról? (4 pont)
Jelölje u_B:
$(M+m_L+m_B)\,v_0 = (M+m_L)\,v_1 + m_B\,u_B$
$\rightarrow\ u_B = v_0 + (M+m_L)\,(v_0-v_1)\,/\,m_B$

2.a) Mekkora sebességgel ugrik Lolka a kiskocsihoz képest? (3 pont)
Jelölje $v_{rel,L}$:
$(M+m_L)\,v_1 = M\,(nv_1) + m_L\,(v_1+v_{rel,L})$
$\rightarrow\ v_{rel,L} = M\,v_1(1-n)\,/\,m_L$

2.b) Mekkora sebességgel ugrik Lolka a talajhoz képest? (3 pont)
Jelölje u_L:
$(M+m_L)\,v_1 = M\,(nv_1) + m_L\,u_L$
$\rightarrow\ u_L = v_1 + M\,v_1(1-n)\,/\,m_L$

És még mindenki kapott két kérdést a következő 11 kérdésből:
Ezekben a feladatokban a fent már kiszámolt sebességekből lehetett tovább számolni.

Mennyi Lolka impulzusának megváltozása, miközben lelöki Bolkát? (2 pont)
$\Delta p_L = m_L\,(v_1 - v_0)$

Mennyi Bolka impulzusának megváltozása, miközben lelöki őt Lolka a kiskocsiról? (2 pont)

$\Delta p_B = m_B (u_B - v_0) = m_B v_{rel,B}$

Mennyi Lolka gyorsulása, miközben lelöki Bolkát? (2 pont)

$a_L = \Delta v_L / \Delta t = (v_1 - v_0) / \Delta t$

Mennyi Bolka gyorsulása, miközben lelöki őt Lolka a kiskocsiról? (2 pont)

$a_B = \Delta v_B / \Delta t = (u_B - v_0) / \Delta t = v_{rel,B} / \Delta t$

Mekkora nagyságú erő hatott Bolkára, amikor lelökte őt Lolka a kiskocsiról? (2 pont)

$F_B = m_B a_B = m_B \Delta v_B / \Delta t = m_B (u_B - v_0) / \Delta t = m_B v_{rel,B} / \Delta t$

Mennyi volt a kiskocsi mozgási energiájának megváltozása, amikor Lolka lelökte Bolkát? (2 pont)

$\Delta E_{kin,M} = ½M (v_1^2 - v_0^2)$

Mennyi volt Lolka mozgási energiájának megváltozása, amikor lelökte Bolkát? (2 pont)

$\Delta E_{kin,L} = ½m_L (v_1^2 - v_0^2)$

Mennyi volt Bolka mozgási energiájának megváltozása, amikor lelökte őt Lolka? (2 pont)

$\Delta E_{kin,B} = ½m_B (u_B^2 - v_0^2) = ½m_B ((v_0+v_{rel,B})^2 - v_0^2)$

Mennyi Lolka gyorsulása, amikor leugrik a kiskocsiról? (2 pont)

$a_L = \Delta v_L / \Delta t = (u_L - v_1) / \Delta t = v_{rel,L} / \Delta t$

Mekkora nagyságú erő hat Lolkára, amikor leugrik a kiskocsiról? (2 pont)

$F_B = m_L a_L = m_L \Delta v_L / \Delta t = m_L (u_L - v_1) / \Delta t = m_L v_{rel,L} / \Delta t$

Mennyivel nő Lolka mozgási energiája, amikor leugrik a kiskocsiról? (2 pont)

$\Delta E_{kin,L} = ½m_L (u_L^2 - v_1^2) = ½m_L ((v_1+v_{rel,L})^2 - v_1^2)$

2. FELADAT

Vegyészmérnökök

α hajlásszögű lejtőn felfelé gurul egy test v sebességgel. A test h m-rel van magasabban a lejtő aljához képest.
A test tömege m, sugara R, a tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára nézve $n \cdot mR^2$. A test tisztán gördül, nem csúszik meg.
α, v, h, m, R és n random generált értékek voltak.

Mekkora a test tömegközéppontjának gyorsulása? (4 pont)

MO. Ld. a kidolgozott 9/5. feladatot!

$$a = \frac{g\sin\alpha}{\frac{\Theta_S}{mR^2}+1} = \frac{g\sin\alpha}{n+1}$$

És még az alábbi 7 kérdésből véletlenszerűen kapott mindenki 2 kérdést:

Mekkora a test szöggyorsulása? (2 pont)
$\beta = a/R = \frac{g\sin\alpha}{(n+1)R}$ (a gyorsulás ki volt számolva az első kérdésnél)

Mekkora a nehézségi erő forgatónyomatéka a test és a lejtő érintkezési pontjára? (2 pont)
$M_P = mg \cdot R \cdot \sin\alpha$

Mekkora tapadási súrlódási erő lép fel a test és a lejtő érintkezési pontjánál? (2 pont)
$ma = mg\sin\alpha - F_t \rightarrow F_t = m(g\sin\alpha - a)$
vagy
$\Theta_S \cdot \beta = F_t \cdot R \rightarrow F_t = \Theta_S \cdot \beta / R = \Theta_S \cdot a / R^2$
(a gyorsulás ki volt számolva az első kérdésnél)
(Illetve 'a' és Θ_s behelyettesítésével: $F_t = \Theta_S \cdot a/R^2 = nmR^2 \cdot \frac{g\sin\alpha}{(n+1)R} / R^2 = \frac{n}{n+1} mg\sin\alpha$.)

Mekkora a tapadási súrlódási erő forgatónyomatéka a test tömegközéppontjára? (2 pont)
$M_S = F_t \cdot R = \Theta_S \cdot \beta = \Theta_S \cdot a/R$ (a gyorsulás ki volt számolva az első kérdésnél)
(Illetve 'a' és Θ_s behelyettesítésével: $M_s = \Theta_S \cdot a/R = nmR^2 \cdot \frac{g\sin\alpha}{(n+1)R} / R = \frac{n}{n+1} mg\sin\alpha\, R$.)

Mennyivel jut még magasabbra a test, mire elveszíti a sebességét? (2 pont)
energia-megmaradással: $mgh + ½mv^2 + ½\Theta_s\omega^2 = mg(h+H) + 0 + 0$ (H-val jut feljebb)
$½mv^2 + ½\Theta_s\omega^2 = ½mv^2 + ½\Theta_s(v/R)^2 = ½mv^2 + ½nmR^2(v/R)^2 = ½mv^2 + ½nmv^2 = ½mv^2(1+n)$
$\rightarrow H = v^2(1+n)/(2g)$

Mennyivel nő meg a potenciális energiája a testnek, mire elveszíti a sebességét? (2 pont)
energia-megmaradással: $E_{pot,0} + ½mv^2 + ½\Theta_s\omega^2 = E_{pot,1}$
$\rightarrow \Delta E_{pot} = ½mv^2 + ½\Theta_s\omega^2 = ½mv^2 + ½\Theta_s(v/R)^2 = ½mv^2 + ½nmR^2(v/R)^2 = ½mv^2 + ½nmv^2 = ½mv^2(1+n)$

Mennyivel változik a forgási kinetikus energiája a testnek, mire elveszíti a sebességét? (2 pont)
$\Delta E_{forg} = 0 - ½\Theta_s\omega^2 = -½\Theta_s(v/R)^2 = -½nmR^2(v/R)^2 = -½nmv^2$

Biomérnökök

α hajlásszögű lejtőn felfelé gurul egy test v sebességgel. A test h m-rel van magasabban a lejtő aljához képest.
A test tömege m, sugara R, a tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára nézve $n \cdot mR^2$. A test tisztán gördül, nem csúszik meg.
α , v, h, m, R és n random generált értékek voltak.

Mekkora lesz a test szögsebessége, amikor majd leérkezik a lejtő aljára? (5 pont)

MO. Ld. a kidolgozott 9/5. feladatot!

energia-megmaradással: $mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_{lent}^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_{lent}^2$
$v = \omega R$ és $\Theta = nmR^2$ felhasználásával $\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}(nmR^2)(v/R)^2 = \frac{1}{2}nmv^2$,
tehát $mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}nmv^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 (1+n)$.
Ha lent először a sebességet fejezzük ki:
$\frac{1}{2}\Theta\omega_{lent}^2 = \ldots = \frac{1}{2}nmv_{lent}^2$
$\rightarrow \quad mgh + \frac{1}{2}mv^2 (1+n) = \frac{1}{2}mv_{lent}^2 + \frac{1}{2}nmv_{lent}^2 = \frac{1}{2}mv_{lent}^2 (1+n)$
$\rightarrow \quad v_{lent} = \sqrt{(v^2 + 2gh/(1+n))} \quad \rightarrow \quad \omega_{lent} = v_{lent}/R = \sqrt{(v^2 + 2gh/(1+n))} / R$.
Ha lent rögtön a szögsebességet fejezzük ki:
$\frac{1}{2}mv_{lent}^2 = \frac{1}{2}m(\omega_{lent}R)^2$
$\rightarrow \quad mgh + \frac{1}{2}mv^2 (1+n) = 0 + \frac{1}{2}m(\omega_{lent}R)^2 + \frac{1}{2}(nmR^2)\, \omega_{lent}^2 = 0 + \frac{1}{2}m\omega_{lent}^2R^2 (1+n)$
$\rightarrow \quad \omega_{lent} = \sqrt{(v^2 + 2gh/(1+n))} / R$.

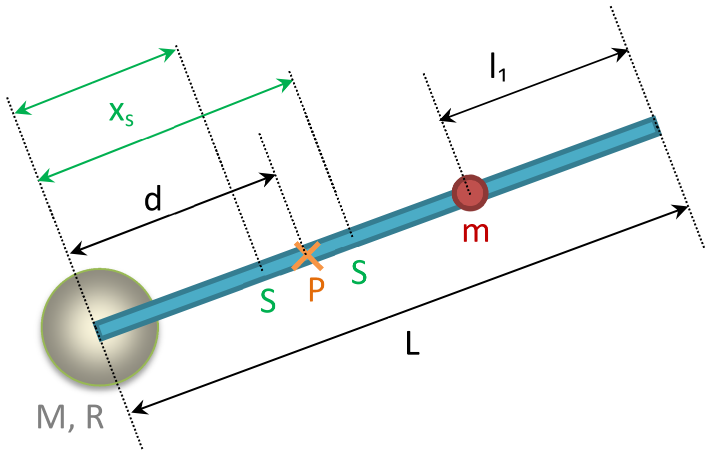
A második kérdésre két változat volt:

Hányszorosára nő a test tömegközéppontjának sebessége a lejtő aljára érve akkor, ha tisztán gördül, ahhoz képest, mintha súrlódásmentesen csúszna? (3 pont)
MO.
Az első kérdésből tudjuk ω_{lent} értékét $\rightarrow$ $v_{lent} = R\,\omega_{lent}$.
Súrlódásmentes lejtőn energia-megmaradásból
$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_{lent,sm}^2 \quad \rightarrow \quad v_{lent,sm} = \sqrt{(v^2 + 2gh)}$
$v_{lent,sm} / v_{lent} = \ldots$
[Képlettel: $v_{lent} / v_{lent,sm} = \sqrt{\{(v^2 + 2gh/(1+n)) / (v^2 + 2gh)\}}$.]

Hányszorosára nő a test (haladó mozgásból származó) mozgási energiája a lejtő aljára érve akkor, ha tisztán gördül, ahhoz képest, mintha súrlódásmentesen csúszna? (3 pont)
MO.
Az első kérdésből tudjuk ω_{lent} értékét $\rightarrow$ $v_{lent} = R\,\omega_{lent}$.
Súrlódásmentes lejtőn energia-megmaradásból
$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_{lent,sm}^2 \quad \rightarrow \quad v_{lent,sm}^2 = v^2 + 2gh$
$E_{kin,lent} / E_{kin,lent,sm} = (v_{lent,sm} / v_{lent})^2 = \ldots$
[Képlettel: $E_{kin,lent} / E_{kin,lent,sm} = (v^2 + 2gh/(1+n)) / (v^2 + 2gh)$.]

3. FELADAT

Az ábrán látható szerkezet adatai:



Egy L hosszú, $m_{rúd}$ tömegű rúd egyik végéhez rögzítettünk egy M tömegű, R sugarú [vegyészmérnökök: gömböt; biomérnökök: korongot] úgy, hogy a [vegyészmérnökök: gömb; biomérnökök: korong] középpontja éppen a rúd végénél van. A rúd másik végétől l_1 távolságra egy tömegpontnak tekinthető m tömegű testet rögzítettünk. Ez a szerkezet a P ponton keresztül átmenő, a rúdra merőlege tengely körül foroghat. A P pont távolsága a rúdnak attól a végétől, ahol a [vegyészmérnökök: gömb; biomérnökök: korong] középpontja van, d. Kiinduló helyzetben a szerkezet a vízszintessel α fokos szöget zár be. (6 pont)
L, $m_{rúd}$, M, R, l_1, m, d és α random generált értékek voltak.

Háromféle kérdés volt:

A: Számoljuk ki, milyen távol van a szerkezet tömegközéppontja a forgástengelytől!
MO.
A tömegközéppont a rúdnak attól a végétől, ahol a gömb, ill. korong van rögzítve:
$x_S = (0 \cdot M + (L/2) \cdot m_{rúd} + (L-l_1) \cdot m) / (M+m_{rúd}+m)$
Ennek távolsága a P ponttól $| d - x_S |$.
Az ábrán azért van két S pont jelölve, mert az adatok eltérőek voltak, így a tömegközéppont lehetett P-től jobbra vagy balra is.

B: Mekkora a nehézségi erő forgatónyomatéka a forgástengelyre?
MO.
Az erőkarok: gömb ill. korong: $d \cdot \cos\alpha$; rúd: $(L/2-d) \cdot \cos\alpha$; tömegpont: $(L-d-l_1) \cdot \cos\alpha$.
A gömb ill. korong pozitív irányba, a rúd és a tömegpont negatív irányba forgat.
A forgatónyomaték P-re: $M_P = [M \cdot d - m_{rúd} \cdot (L/2-d) - m \cdot (L-d-l_1)] \cdot g \cdot \cos\alpha$.
Vagy: a tömegközéppont koordinátáját kiszámolva (ld. A feladat)
$M_P = (M + m_{rúd} + m) \cdot g \cdot (d - x_S) \cdot \cos\alpha$.

C: Mekkora a szerkezet tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre?

MO.

A gömbé ill. korongé

a tömegközéppontjára $\Theta_{g,s} = 0{,}4MR^2$ ill. $\Theta_{k,s} = 0{,}5MR^2$,

Steiner-tag $\Theta_1 = Md^2$;

a rúdé

a tömegközéppontjára $\Theta_{rúd,s} = m_{rúd}L^2/12$,

Steiner-tag $\Theta_2 = m_{rúd}(L/2–d)^2$;

a tömegponté

$\Theta_m = m(L–d–l_1)^2$;

a teljes szerkezeté $\Theta_P = \Sigma\Theta$ (a fenti 5 tag összege).