Fizika 1 - Mechanika számolási gyakorlat zh2 2023. máj. 25. megoldás

A vándorcirkusz igazgatójának van két kutyája, Acetilén és Benzol. Mindkét kutya 16 kg-os.

1. A cirkuszigazgató azzal edzi a kutyái reflexeit, hogy a vacsorájukat, a 24 dkg-os pulykanyakat egy rugó végéhez rögzítve mozgatja előttük, és csak akkor adja oda nekik, ha gyorsan el tudják kapni, amikor jelet ad. A rugó 80 cm hosszú. Ahhoz, hogy 10 cm-rel összenyomja a rugót, 1,5 N erőt kell kifejtenie.

a) Mekkora a rugó rugóállandója? (0,5 p.)

Acetilén vacsorájával a rugót vízszintes, súrlódásmentes síkon helyezi el, egyik végét rögzíti, a másik végéhez rögzíti a pulykanyakat (24 dkg), 10 cm-rel összenyomja, majd elengedi, hogy a pulykanyak rezgőmozgásba kezdjen.

b) Mekkora a rezgés amplitúdója? (0,5 p.)

c) Mekkora a pulykanyak maximális sebessége? (1 p.)

d) A pulykanyak elengedése után 7 s-mal szól a cirkuszigazgató, hogy Acetilén elkaphatja a pulykanyakat. Milyen távol van ekkor a pulykanyak a rugó rögzített végétől? (1 p.)

Benzol vacsoráját (24 dkg) a rugó végére rögzítve a cirkuszigazgató a rugót függőlegesen akasztja fel, megint összenyomja 10 cm-rel (70 cm-re), és onnan elengedi.

e) Mekkora az így létrejövő rezgőmozgás periódusideje? (1 p.)

f) Mekkora a rezgés amplitúdója (függőleges rugó esetén)? (1 p.)

g) Adja meg a pulykanyakra ható rugóerőt és az eredő erőt a rezgőmozgás legalsó pontjában, a rugóerőt az egyensúlyi helyzetnél, és az eredő erőt a rugó nyugalmi hosszánál!

Az erők nagyságát írja be a megfelelő téglalapokba, és nyíllal jelezze az erők irányát. (2 p.)

	legalsó pontban	egyensúlyi helyzetnél	rugó nyugalmi hosszánál
rugóerő			
eredő erő			

Megoldás:

a) $\Delta\ell(0) = x(0) = -10$ cm $= -0{,}1$ m, ehhez $|F| = 1{,}5$ N, tehát $k = |F / \Delta\ell(0)| = 15$ N/m. (0,5 p.)

b) Mivel $v_0 = 0$, ezért $A = |x(0)| = 0{,}1$ m. (0,5 p.)

c) $v_{max} = A\,\omega$, ahol $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{15/0{,}24} = 7{,}906\ \mathrm{s}^{-1}$, tehát $v_{max} = 0{,}1\cdot 7{,}906 = 0{,}7906$ m/s. (1 p.)

d) Mivel a rugó összenyomott helyzetből indul és $v_0 = 0$, ezért $\varphi_0 = \pi$:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}1\cos(7{,}906t + \pi) = -\,0{,}1\cos(7{,}906t).$$

$t = 7$ s-ban $x(7) = -\,0{,}1\cos(7{,}906\cdot 7) = -0{,}03541$ m a rugó megnyúlása (össze van nyomódva), a rugó hossza $\ell(7) = \ell_0 + x(7) = 0{,}8 - 0{,}03541 = 0{,}7646$ m $= 76{,}46$ cm. (1 p.)

e) $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi/\omega = 2\pi/7{,}906 = 0{,}7948$ s. (1 p.)

f) Függőleges helyzetben a rugó egyensúlyi megnyúlása

$$x_{es} = mg/k = 0{,}24\cdot 10/15 = 0{,}16 \text{ m},$$

vagyis a rugó hossza az egyensúlyi helyzetben $\ell_{es} = \ell_0 + x_{es} = 0{,}8 + 0{,}16 = 0{,}96$ m.

Kiinduláskor a rugó hossza $\ell(0) = 0{,}7$ m (és $v_0=0$), ezért $A = |\ell(0)-\ell_{es}| = |0{,}7-0{,}96| = 0{,}26$ m. (1 p.)

g) Az egyensúlyi helyzetnél $F_{r,es} = mg = 2{,}4$ N (az eredő zérus), felfelé. (0,5 p.)

A rugó nyugalmi hosszánál $F_{r,0} = 0 \rightarrow F_{e,0} = mg = 2{,}4$ N, lefelé. (0,5 p.)

A legalsó pontban a rugó hossza $\ell_{alsó} = \ell_{es} + A = 0{,}96+0{,}26 = 1{,}22$ m,

a megnyúlása $\Delta\ell_{alsó} = \ell_{alsó} - \ell_0 = 1{,}22-0{,}8 = 0{,}42$ m,

a rugóerő $F_{r,alsó} = -k\,\Delta\ell_{alsó} = -15\cdot 0{,}42 = -6{,}3$ N, vagyis 6,3 N felfelé.

A nehézségi erő $mg = 2{,}4$ N lefelé, tehát az eredő erő $F_{e,alsó} = -6{,}3+2{,}4 = -3{,}9$ N, vagyis 3,9 N felfelé.

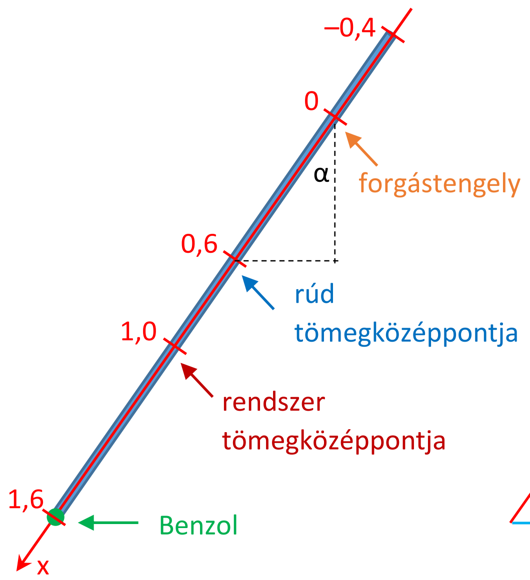
(1 p.)

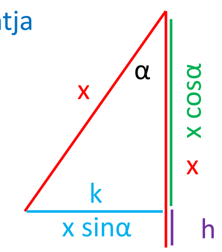
2. Benzol (16 kg) egyik mutatványa az, hogy egyszerre tud énekelni és hintázni. A hintája egy egyszerű rúd, aminek a végére rákapaszkodik. A rúd egy 24 kg tömegű, 15 cm átmérőjű, 2 m hosszú homogén henger, ami a felső végétől 40 cm-re van rögzítve (vagyis a rúd 40 cm-es darabja a forgástengely fölött van). Benzolt egy tömegpontnak tekinthetjük, ami a rúd alsó végén van.
Hintázás közben a rúd maximális kilendülése 30° a függőlegeshez képest.
Tehetetlenségi nyomaték képletek:

rúd a felezőpontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre	rúd a végpontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre	henger
$\frac{1}{12}$ m L^2	$\frac{1}{3}$ m L^2	$\frac{1}{2}$ m R^2

a) Milyen távol van a rúd és Benzol közös tömegközéppontja a forgástengelytől? (1,5 p.)
b) Mekkora a rúd + Benzol tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre? (2 p.)
c) A maximális kilendülésnél mekkora forgatónyomaték hat a rúd + Benzol rendszerre? (1 p.)
d) Mekkora a rúd szögsebessége a függőleges helyzeten való áthaladáskor? (2,5 p.)
e) Mekkora Benzol sebessége a függőleges helyzeten való áthaladáskor? (0,5 p.)
f) Az ének végén Benzol leugrik a hintáról, méghozzá abban a pillanatban, amikor a rúd éppen függőleges helyzetben van, és úgy rugaszkodik el, hogy a hinta éppen megáll.
Mennyi Benzol sebessége a földhöz képest az elugrás pillanatában? (1,5 p.)

Megoldás:
a) Vegyük fel az x tengelyt úgy, hogy az origó a forgástengelynél van, így a kiszámolt koordináta éppen egyenlő a forgástengelytől vett távolsággal. A tengely mutasson Benzol irányába.
Benzol x_B = 2–0,4 = 1,6 m-nél van.
A rúd homogén, tehát a tömegközéppontja a felezőpontjánál van, 1 m-re a végétől, vagyis x_r = 1,6–1 = 0,6 m-re az origótól.





$x_S = (m_B x_B + m_r x_r) / (m_B+m_r)$ =
= (16·1,6 + 24·0,6) / (16+24) = 1 m
a forgástengelytől. (1,5 p.)

b) Benzol tömegpont, a forgástengelytől x_B = 1,6 m-re van:

$$\Theta_B = m_B\, x_B^2 = 16\cdot 1{,}6^2 = 40{,}96 \text{ kg m}^2.$$

A rúd henger keresztmetszetű, de nem a henger szimmetriatengelye körül forog, hanem a rúdra merőlegesen, tehát rúdként számolunk vele. A tömegközéppontjának távolsága a forgástengelytől
$d_r = x_r$ = 1–0,4 = 0,6 m, tehát

$$\Theta_r = \frac{1}{12} m_r\, L^2 + m_r\, d_r^2 = \frac{1}{12}\cdot 24\cdot 2^2 + 24\cdot 0{,}6^2 = 8+8{,}64 = 16{,}64 \text{ kg m}^2.$$

A rendszer tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_{össz} = \Theta_B + \Theta_r = 40{,}96+16{,}64 = 57{,}6 \text{ kg m}^2.$$ (2 p.)

c) Számolhatunk testenként:

$$M_{össz} = M_B + M_r = m_B g\, k_B + m_r g\, k_r,$$

vagy a Benzol + rúd rendszer összetömegét a rendszer tömegközéppontjába helyezve:

$$M_{össz} = (m_B+m_r) g\, k_S.$$

Az ábráról látható, hogy k = x·sin30°, vagyis

$M_{össz}$ = 16·10 · 1,6·sin30° + 24·10 · 0,6·sin30° = 128+72 = 200 Nm, ill.

$M_{össz}$ = (16+24)·10 · 1,0·sin30° = 200 Nm. (1 p.)

d) Energia-megmaradással számolhatunk:

$E_{pot} + E_{forg} = mgz + ½Θω^2$ = konst., ill. $ΔE_{pot} = ΔE_{forg}$.

A helyzeti energiát egyszerűbb a rendszer tömegközéppontjába helyezett össztömeggel felírni. Ha az E_{pot} = 0 szintet ott vesszük fel, ahol függőleges helyzetű rúd esetén a közös tömegközéppont van, akkor (ld. az ábrát)

$E_{pot,30°} = (m_B+m_r)g \cdot x_s(1–\cos30°)$ = (16+24)·10 · 1,0·(1–cos30°) = 53,59 J,

tehát

$E_{pot,30°} + 0 = 0 + ½Θω_0^2 \quad \rightarrow \quad ω_0 = \sqrt{2E_{pot,30°}/Θ_{össz}} = \sqrt{2·53,59/57,6} = 1,364\ s^{-1}$. (2,5 p.)

e) Benzol a forgástengelytől 1,6 m-re van, ekkora sugarú köríven mozog, tehát

$v_{B,0} = x_B\ ω_0$ = 1,6·1,364 = 2,183 m/s. (0,5 p.)

f) Az elugráskor Benzol elrugaszkodik a rúd végéről, ezzel erőt fejt ki a rúdra (ez belső erő), ami miatt a rúd felfüggesztésénél fellép egy külső erő, így a rendszer össz-impulzusa nem marad meg, de az össz-impulzusmomentuma megmarad, mivel a külső erő a forgástengelynél lép fel, így a forgatónyomatéka nulla.

A rendszer impulzus-momentuma a függőleges helyzetben

$L_{össz} = Θ_{össz}\ ω_0$ = 57,6·1,364 = 78,57 kg m² / s.

Amikor Benzol leugrik, a rúd megáll, annak az impulzusmomentuma zérus, Benzolé pedig

$L_B = m_B\ v_B\ k_B$, ahol k_B = 1,6 m, mert a sebességvektora ilyen távolságra van a forgástengelytől.

Tehát

$L_B = L_{össz:}\quad m_B\ v_B\ k_B = 16\ v_B \cdot 1,6 = 78,57 \quad \rightarrow \quad v_B$ = 3,069 m/s. (1,5 p.)

3. Acetilén (16 kg) és Benzol (16 kg) ráállnak egy 8 kg-os gördeszkára (mindketten egyszerre). A nyugalomban levő gördeszkáról elrugaszkodik először Acetilén, majd 2 s múlva Benzol. Mindketten ugyanabba az irányba ugranak el és elrugaszkodáskor ugyanakkora a sebességük a gördeszkához képest. A gördeszka vízszintes terepen van, a súrlódás elhanyagolható.

A második kutya leugrása után a gördeszka 4 m/s sebességgel gurul.

a) Mekkora sebességgel rugaszkodtak el a gördeszkához képest a kutyák?

b) Mekkora volt a gördeszka sebessége akkor, amikor még csak Acetilén ugrott le?

c) Mekkora Benzol impulzusának változása akkor, amikor Acetilén ugrik le a gördeszkáról?

d) Mekkora Benzol impulzusának változása akkor, amikor ő ugrik le a gördeszkáról?

e) A gördeszka ezek után lecsúszik (nem gurul!) egy 22,62° hajlásszögű, 2,6 m hosszú súrlódásmentes lejtőn, majd újra vízszintes felületre érkezik, ahol a súrlódási együttható 0,2. Mekkora távolságot tesz meg a gördeszka a lejtő aljától, amíg megáll? A súrlódásos szakaszon munkatétellel számoljon!

Megoldás:

A feladatot impulzus-megmaradással oldhatjuk meg, mivel a külső erők eredője zérus.

a)-b) $m_A = m_B$ = 16 kg, m_{gd} = 8 kg; v_0 = 0; v_{rel} = ?; Acetilén leugrása után v_1 = ?; v_2 = 4 m/s.

Acetilén leugrása előtt az össz-impulzus

$p_{0,össz} = (m_A+m_B+m_{gd})\ v_0 = 0$,

Acetilén leugrása után pedig

$p_{1,össz} = m_A \cdot v_{rel} + (m_B+m_{gd})\ v_1 = 16\ v_{rel} + 24\ v_1$.

Mivel $p_{0,össz} = p_{1,össz}$, ezért

$16\ v_{rel} + 24\ v_1 = 0$ [1]

(A pozitív irányt úgy vettük fel, hogy a gördeszka sebessége legyen pozitív, és így felírva a v_{rel} értékére negatív számot fogunk kapni; de felírhatjuk az egyenletet

$p_{1,össz} = m_A \cdot (-v_{rel}) + (m_B+m_{gd})\ v_1 = -16\ v_{rel} + 24\ v_1$

alakban is, így a megoldás v_{rel} nagysága lesz.)

Tovább gurul Benzol a gördeszkán, az ő impulzusuk

$p_{1,B+gd} = (m_B+m_{gd})\ v_1 = 24\ v_1$.

Benzol leugrása után

$p_2 = m_B\ (v_1 + v_{rel}) + m_{gd}\ v_2 = 16\ (v_1 + v_{rel}) + 8\cdot 4 = 16\ (v_1 + v_{rel}) + 32$.

(Vagy: $p_2 = m_B\ (v_1 - v_{rel}) + m_{gd}\ v_2 = 16\ (v_1 - v_{rel}) + 8\cdot 4 = 16\ (v_1 - v_{rel}) + 32$.

Az impulzus-megmaradás erre a lépésre:

$p_{1,B+gd} = p_2$: $24\ v_1 = 16\ (v_1 + v_{rel}) + 32$ [2]

Az [1]+[2] egyenletrendszer megoldása

$v_{rel} = -1{,}5$ m/s (azaz $|v_{rel}| = 1{,}5$ m/s) és $v_1 = 1$ m/s.

c) $\Delta p_{B,1} = m_B\ (v_1 - v_0) = 16\cdot(1-0) = 16$ kg m/s.

d) $\Delta p_{B,2} = m_B\ ((v_1+v_{rel}) - v_1) = m_B\ v_{rel} = 16\cdot(-1{,}5) = -24$ kg m/s.

e) A súrlódásmentes lejtőn való lecsúszásra felírhatunk energia-megmaradást:

$E_{pot} + E_{kin} = mgz + ½mv^2 = \text{konst.}$

A lejtő magassága $h = L \sin\alpha = 2{,}6\cdot\sin 22{,}62° = 1{,}0$ m.

$\cancel{m_{gd}} g\ h + ½\ \cancel{m_{gd}}\ v_2^2 = 0 + ½\ \cancel{m_{gd}}\ v_3^2$

$10\cdot 1 + 0{,}5\cdot 4^2 = 0{,}5\ v_3^2 \quad\rightarrow\quad v_3 = 6$ m/s

sebességgel érkezik a gördeszka a lejtő aljára.

(Ugyanez munkatétellel felírva:

$W_{össz} = \Delta E_{kin}$: $\cancel{m} g \sin\alpha \cdot L = ½\ \cancel{m}\ v_3^2 - ½\ \cancel{m}\ v_2^2 \quad\rightarrow\quad v_3 = \dots$)

A súrlódásos felületen munkatételt kell felírnunk.

A nehézségi erő és a nyomóerő által végzett munka zérus, mivel merőlegesek a sebességre.

A súrlódási erő által végzett munka

$W_s = F_s \cdot s \cdot \cos 180° = -\ \mu\ F_{ny} \cdot s = -\ \mu\ m_{gd}\ g\ s$.

Induláskor a lejtő alján

$E_{kin,3} = ½\ m_{gd}\ v_3^2$,

a végén pedig megáll, tehát $E_{kin,4} = 0$.

Vagyis

$W_{össz} = \Delta E_{kin}$: $-\ \mu\ \cancel{m_{gd}}\ g\ s = 0 - ½\ \cancel{m_{gd}}\ v_3^2$

$\rightarrow\quad s = v_3^2 / (2\mu g) = 6^2 / (2\cdot 0{,}2\cdot 10) = 9$ m.