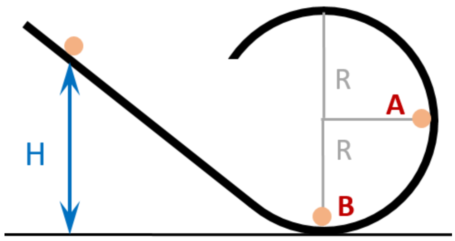
5. ANYAG: KÖRPÁLYA

A lejtő érintő irányban csatlakozik az R sugarú körív keresztmetszetű vályúhoz. A súrlódás a lejtőn is és a vályúban is elhanyagolható. Egy m tömegű testet kezdősebesség nélkül elengedünk a lejtő H magasságú pontjából. $g = 10\ m/s^2$.



R, H és m véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl. R = 0,57 m; H = 0,92 m; m = 0,34 kg.

a) Mekkora a test sebessége az A pontban?

Energia-megmaradást felírva

$$mgH = mgR + \tfrac{1}{2} m v_A^2 \quad \rightarrow \quad v_A = \sqrt{2g(H-R)}$$

$$v_A = \sqrt{2\cdot 10\cdot(0{,}92-0{,}57)} = 2{,}646\ m/s.$$

b) Mekkora a vályú által a testre kifejtett nyomóerő az A pontban?

Az A pontban a nehézségi erőnek nincsen sugár irányú komponense, ezért

$$m\, a_{cp,A} = F_{ny,A}.$$

A centripetális gyorsulást a sebességből ki tudjuk számolni, így

$$F_{ny,A} = m\, v_A^2 / R\ ; \qquad \text{ill.} \quad v_A\text{-t H-val és R-rel kifejezve} \quad F_{ny} = m\, 2g(H-R) / R$$

$$F_{ny,A} = 0{,}34\cdot 2{,}646^2/0{,}57 = 4{,}175\ N; \qquad \text{ill.} \quad F_{ny,A} = 0{,}34\cdot 2\cdot 10\cdot(0{,}92-0{,}57)/0{,}57 = 4{,}175\ N$$

c) Mekkora a test gyorsulásának nagysága az A pontban?

A gyorsulásnak két komponense van: a sugár irányú $a_{cp,A} = v_A^2/R$ és az érintő irányú $a_t = g$ gyorsulás, tehát

$$a = \sqrt{(v_A^2/R)^2 + g^2}\ , \quad \text{ill.} \quad v_A\text{-t H-val és R-rel kifejezve} \quad a = g\sqrt{(2(H-R)/R)^2 + 1}$$

$$a = \sqrt{\left(2{,}646^2/0{,}57\right)^2 + 10^2} = 15{,}84\ m/s^2\ , \quad \text{ill.} \quad a = 10\cdot\sqrt{(2\cdot(0{,}92-0{,}57)/0{,}57)^2 + 1}$$

d) Mekkora a test súlya a B pontban?

A test súlya a vályú által kifejtett nyomóerő. A B pontban a lefelé mutató nehézségi erő és a felfelé mutató nyomóerő eredője felfelé mutat, és ebből származik a test centripetális gyorsulása:

$$F_{ny} - mg = F_e = m\, a_{cp,B} = m\, v_B^2/R \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg + m\, v_B^2/R.$$

A sebességet energia-megmaradásból fejezhetjük ki:

$$mgH = \tfrac{1}{2} m v_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = 2gH, \quad v_B = \sqrt{2gH}.$$

Ezt felhasználva tehát

$$F_{ny} = mg + m\, v_B^2/R = mg + m\, 2gH / R = mg\,(1 + 2H/R)$$

$$v_B = \sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}92} = 4{,}290\ m/s, \quad F_{ny} = 0{,}34\cdot 10 + 0{,}34\cdot 4{,}290^2/0{,}57 = 14{,}38\ N,$$

$$\text{ill.} \quad F_{ny} = mg\,(1 + 2H/R) = 0{,}34\cdot 10\cdot(1+2\cdot 0{,}92/0{,}57) = 14{,}38\ N$$

Fizika1 – Mechanika számolási gyakorlat zh2 megoldások 2021. ápr. 9. Moodle

e) kérdés: véletlenszerűen lettek szétosztva az alábbi kérdések:

e) Mekkora a test szöggyorsulása az A pontban?

A nehézségi erőből származik a test a_t érintő irányú gyorsulása, tehát $a_t = g$, és $a_t = \beta_A R$ $\rightarrow$

$\beta_A = g / R$

$\beta_A = 10 / 0{,}57 = 17{,}54\ 1/s^2$

e) Mekkora a test szöggyorsulása a B pontban?

A testre ebben a pontban nem hat érintő irányú erő, tehát $\beta_B = 0$.

e) Mekkora a test centripetális gyorsulása a B pontban?

A sebességet energia-megmaradásból fejezhetjük ki:

$mgH = ½\, mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B^2 = 2gH, \quad v_B = \sqrt{2gH},$

és ezzel a centripetális gyorsulás

$a_{cp,B} = v_B^2 / R = 2gH / R$

$a_{cp,B} = v_B^2 / R = 4{,}290^2/0{,}57 = 32{,}28\ m/s^2$, ill. $a_{cp,B} = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}92/0{,}57 = 32{,}28\ m/s^2$

e) Mekkora a test szögsebessége a B pontban?

A sebességet energia-megmaradásból fejezhetjük ki:

$mgH = ½\, mv_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gH},$

és ebből a szögsebesség

$\omega_{,B} = v_B / R = \sqrt{2gH} / R.$

$\omega_{,B} = v_B / R = 4{,}290 / 0{,}57 = 7{,}525\ 1/s$; ill. $\omega_B = \sqrt{2gH}/R = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}92}/0{,}57 = 7{,}525\ 1/s$

f) Legalább mekkora kezdősebességet kellene adni a testnek a kiindulási pontban, ha azt szeretnénk, hogy a test eljusson a körpálya legfelső pontjára is?

Ahhoz, hogy végigmenjen a körpályán, minimum akkora sebességgel kell rendelkeznie a legfelső pontban, amit a nehézségi erőből származó centripetális gyorsulás ad meg:

$g = a_{cp,fent,min} = v_{fent,min}^2/R \quad \rightarrow \quad v_{fent,min}^2 = gR.$

Ezzel már felírhatjuk az energia-megmaradást:

$mgH + ½m\, v_{0,min}^2 = mg\, 2R + ½m\, v_{fent,min}^2 \quad \rightarrow \quad v_{0,min}^2 = v_{fent,min}^2 + 2g\,(2R–H),$

ill. $v_{fent,min}^2$ értékét beírva $v_{0,min}^2 = gR + 2g\,(2R–H) = g\,(5R – 2H).$

$v_{fent,min}^2 = gR = 10 \cdot 0{,}57 = 5{,}7\ m^2/s^2$, $v_{fent,min} = 2{,}387\ m/s$,

$v_{0,min}^2 = v_{fent,min}^2 + 2g\,(2R–H) = 5{,}7 + 2 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 0{,}57–0{,}92) = 10{,}1\ m^2/s^2$, $v_{0,min} = 3{,}178\ m/s$,

ill. $v_{0,min}^2 = g\,(5R – 2H) = 10 \cdot (5 \cdot 0{,}57–2 \cdot 0{,}92) = 10{,}1\ m^2/s^2$, $v_{0,min} = 3{,}178\ m/s$

Fizika1 – Mechanika számolási gyakorlat zh2 megoldások 2021. ápr. 9. Moodle

6. ANYAG: RUGÓ, REZGŐMOZGÁS

Egy ℓ_0 nyugalmi hosszúságú rugó végéhez rögzítünk egy m tömegű testet, majd vízszintes, súrlódásmentes felületre helyezve a másik végét rögzítjük. A rugót összenyomjuk $\ell(0)$ cm-re, majd kezdősebesség nélkül elengedjük a testet. A létrejövő rezgőmozgás periódusideje T s.

ℓ_0, $\ell(0)$, m, T és t véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl. ℓ_0 = 22,3 cm = 0,223 m; $\ell(0)$ = 17,8 cm = 0,178 m; m = 13,2 dkg = 0,132 kg; T = 0,67 s, t = 10,5 s.

a) Mekkora a rezgőmozgás amplitúdója?

Vízszintes helyzetű rugónál a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete a rugó nyugalmi hosszánál van, a rugó kezdeti megnyúlása $x(0) = \ell(0) - \ell_0$, és mivel a kezdősebessége zérus, ezért ennek az abszolút értéke lesz az amplitúdó:

$A = |\ \ell(0) - \ell_0\ |$

$A = |\ 17{,}8 - 22{,}3\ | = 4{,}5 \text{ cm} = 0{,}045 \text{ m}$

b) Mekkora a rezgőmozgás körfrekvenciája?

$\omega = 2\pi / T$

$\omega = 2\pi / 0{,}67 = 9{,}378 \text{ 1/s}$

c) Mekkora lesz a rugó megnyúlása t s múlva? Előjeles választ kérünk! A pozitív irány a rugó megnyúlásának irányába mutat.

$v(0) = -A\omega \sin\varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = 0 \quad \text{vagy} \quad \varphi_0 = \pi$

$x(0) = A \cos\varphi_0 < 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = \pi$, tehát

$x(t) = A \cos(\omega t + \pi) \quad \text{vagy} \quad x(t) = -A \cos(\omega t)$

$x(10{,}5) = 0{,}045 \cdot \cos(9{,}378 \cdot 10{,}5 + \pi) = 0{,}02127 \text{ m}$ ill. $x(10{,}5) = -0{,}045 \cdot \cos(9{,}378 \cdot 10{,}5) = 0{,}02127 \text{ m}$

d) kérdés: véletlenszerűen lettek szétosztva az alábbi kérdések:

d) Mekkora lesz a test sebessége t s múlva? (előjeles választ kérünk)

$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \pi) = A\omega \sin(\omega t)$

$v(10{,}5) = -0{,}045 \cdot 9{,}378 \cdot \sin(9{,}378 \cdot 10{,}5 + \pi) = 0{,}045 \cdot 9{,}378 \cdot \sin(9{,}378 \cdot 10{,}5) = -0{,}3719 \text{ m/s}$

d) Mekkora lesz a test gyorsulása t s múlva? (előjeles választ kérünk)

$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \pi) = A\omega^2 \cos(\omega t)$

$a(10{,}5) = -0{,}045 \cdot 9{,}378^2 \cdot \cos(9{,}378 \cdot 10{,}5 + \pi) = 0{,}045 \cdot 9{,}378^2 \cdot \cos(9{,}378 \cdot 10{,}5) = -1{,}871 \text{ m/s}^2$

d) Mekkora lesz a rugóerő t s múlva? (előjeles választ kérünk)

$F(t) = m \cdot a(t) = -mA\omega^2 \cos(\omega t + \pi) = mA\omega^2 \cos(\omega t)$

$F(10{,}5) = -0{,}132 \cdot 0{,}045 \cdot 9{,}378^2 \cdot \cos(9{,}378 \cdot 10{,}5 + \pi) = 0{,}132 \cdot 0{,}045 \cdot 9{,}378^2 \cdot \cos(9{,}378 \cdot 10{,}5) = -0{,}2469 \text{ N}$

d) Mekkora lesz a test mozgási energiája t s múlva?

$E_{kin}(t) = ½\, m\, v(t)^2 = ½\, m\, [-A\omega \sin(\omega t + \pi)]^2 = ½\, m\, [A\omega \sin(\omega t)]^2$

$v(10{,}5) = -0{,}3719 \text{ m/s}$ (ld. feljebb), $E_{kin}(10{,}5) = 0{,}5 \cdot 0{,}132 \cdot (-0{,}3719)^2 = 0{,}009128 \text{ J}$

d) Mekkora lesz a rugóban tárolt potenciális energia t s múlva?

$E_{pot}(t) = ½\, k\, x(t)^2 = ½\, k\, [A \cos(\omega t + \pi)]^2 = ½\, k\, [-A \cos(\omega t)]^2$

$x(10,5) = 0,02127$ m (ld. **c)** kérdés); $k = 11,61$ N/m (ld. **f)** kérdés);

$E_{pot}(10,5) = 0,5 \cdot 11,61 \cdot 0,02127^2 = 0,002626$ J

e) Mekkora a rezgő rendszer mechanikai energiája?

$E_{mech} = ½\, k\, A^2$

$A = 0,045$ m (ld. **a)** kérdés); $k = 11,61$ N/m (ld. **f)** kérdés); $E_{mech} = 0,5 \cdot 11,61 \cdot 0,045^2 = 0,01175$ J

f) Mekkora a rugó rugóállandója?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \rightarrow \quad k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$k = 0,132\left(\frac{2\pi}{0,67}\right)^2 = 11,61 \text{ N/m}$$

g) Ugyanezt a rugót ugyanezzel a testtel most függőlegesen fellógatjuk, és ismét úgy engedjük el a testet (kezdősebesség nélkül), hogy a rugó hossza $\ell(0)$. $g = 10$ m/s^2. Mekkora az így létrejövő rezgőmozgás amplitúdója?

Függőleges helyzetű rugónál a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete annál a megnyúlásnál van, ahol a rugóerő éppen egyenlő a nehézségi erővel, ebből:

$x_{es} = mg / k.$

A rugó hossza az egyensúlyi helyzetben

$\ell_{es} = \ell_0 + x_{es}.$

A kiinduláskor a rugó hossza és az egyensúlyi hossz közötti eltérés

$\Delta\ell(0) = \ell(0) - \ell_{es} = \ell(0) - (\ell_0 + x_{es}),$

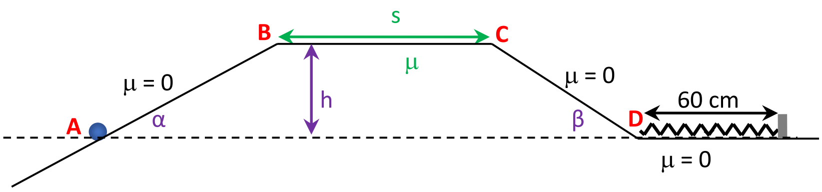
ennek az abszolút értéke az amplitúdó (mivel kezdősebesség nélkül engedtük el a testet):

$A = |\ell(0) - (\ell_0 + x_{es})|$

$x_{es} = 0,132 \cdot 10/11,61 = 0,1137$ m; $A = |0,178 - (0,223 + 0,1137)| = 0,1587$ m

7. ANYAG: MUNKATÉTEL, ENERGIAMEGMARADÁS

Ezt a feladatot munkatétellel, energia-megmaradással oldja meg!



Az α hajlásszögű súrlódásmentes lejtő A pontjából v_0 kezdősebességgel meglökünk felfelé egy m tömegű testet. A lejtő a B pontnál (egy kis íves csatlakozással) egy vízszintes szakaszban folytatódik, ahol a súrlódási együttható μ; majd egy β hajlásszögű súrlódásmentes lejtő következik; végül a D pont után egy újabb vízszintes szakasz következik, ahol a súrlódás elhanyagolható. Ezen a vízszintes szakaszon rögzítettünk egy 60 cm hosszú rugót úgy, hogy a szabad vége éppen a D pontig ér. h = ..., s = ..., a rugóállandó k = ..., g = 10 m/s^2.

v_0, m, μ, h, s, k, α és β véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl. v_0 = 7,8 m/s; m = 0,42 kg; μ = 0,15; h = 0,54 m; s = 1,94 m; k = 118 N/m

(α és β értékére nem lesz szükség)

a) Mekkora a test mechanikai energiája az A pontban? A potenciális energia zérus szintjét vegyük fel az A pont magasságában.

$E_{mech,A} = E_{pot,A} + E_{kin,A} = 0 + ½\, m\, v_A^2$; $v_A = v_0$

$E_{mech,A} = 0{,}5 \cdot 0{,}42 \cdot 7{,}8^2 = 12{,}78$ J

b) Mekkora a test sebessége a B pontban?

Az AB szakasz súrlódásmentes, tehát $E_{mech,A} = E_{mech,B}$:

$E_{pot,A} + E_{kin,A} = E_{pot,B} + E_{kin,B}$: $½\, m\, v_0^2 = mgh + ½\, m\, v_B^2 \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$

$v_B = \sqrt{7{,}8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0{,}54} = 7{,}074$ m/s

c) Mekkora a test sebessége a C pontban?

A BC szakaszra munkatételt írhatunk fel:

$E_{kin,C} - E_{kin,B} = ½\, m\, v_C^2 - ½\, m\, v_B^2 = W_{össz} = W_{súrl} = -F_s\, s = -\mu mg\, s \quad \rightarrow \quad v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu gs}$

$v_C = \sqrt{7{,}074^2 - 2 \cdot 0{,}15 \cdot 10 \cdot 1{,}94} = 6{,}650$ m/s

d) Mekkora a test sebessége a D pontban?

A CD szakasz súrlódásmentes, tehát $E_{mech,C} = E_{mech,D}$:

$E_{pot,C} + E_{kin,C} = E_{pot,D} + E_{kin,D}$: $mgh + ½\, m\, v_C^2 = 0 + ½\, m\, v_D^2 \quad \rightarrow \quad v_D = \sqrt{v_C^2 + 2gh}$

$v_D = \sqrt{6{,}650^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}54} = 7{,}418$ m/s

Fizika1 – Mechanika számolási gyakorlat zh2 megoldások 2021. ápr. 9. Moodle

e) kérdés: véletlenszerűen lettek szétosztva az alábbi kérdések:

e) Mekkora a test mechanikai energiája a B pontban?

Mivel az AB szakasz súrlódásmentes, ezért $E_{mech,B} = E_{mech,A}$.

$E_{mech,A} = 12{,}78$ J (ld. az **a)** kérdést)

e) Mekkora a test mechanikai energiája a C pontban?

A C pontban a mechanikai energia annyival csökkent az A ill. B ponthoz képest, amennyit a súrlódási erő ellenében végzett munka felemésztett:

$E_{mech,C} = E_{mech,A} - W_{súrl} = E_{mech,A} - \mu mg\, s$

$E_{kin,C} = 12{,}78 - 0{,}15 \cdot 0{,}42 \cdot 10 \cdot 1{,}94 = 11{,}55$ J

e) Mekkora a test mechanikai energiája a D pontban?

Az AB és a CD szakasz súrlódásmentes, a D pontban a mechanikai energia annyival csökkent az A ponthoz képest, amennyit a súrlódási erő ellenében végzett munka felemésztett:

$E_{mech,D} = E_{mech,A} - W_{súrl} = E_{mech,A} - \mu mg\, s$

$E_{mech,D} = 12{,}78 - 0{,}15 \cdot 0{,}42 \cdot 10 \cdot 1{,}94 = 11{,}55$ J

f) Mekkora munkát végez a rugóerő a testen, amíg a test eljut a maximális összenyomódásig?

A test elveszíti a mozgási energiáját, miközben nyomja össze a rugót, vagyis munkát végez a rugóerő ellenében. A rugó által végzett munka negatív. Munkatételt felírva:

$E_{kin,végső} - E_{kin,D} = W_{rugó} \quad \rightarrow \quad W_{rugó} = E_{kin,végső} - E_{kin,D} = 0 - E_{kin,D} = -\frac{1}{2} m v_D^2$

$v_D = 7{,}418$ m/s (ld. a **d)** kérdést); $W_{rugó} = -0{,}5 \cdot 0{,}42 \cdot 7{,}418^2 = -11{,}55$ J

g) Mekkora lesz a rugó maximális összenyomódása? (Csak a nagyságot kérjük, előjel nélkül.)

A rugón végzett munka a rugó potenciális energiáját növeli:

$W_{rugó} = -\Delta E_{pot,rugó} = -\frac{1}{2} k\, x_{max}^2 \quad \rightarrow \quad |x_{max}| = \sqrt{-2W_{rugó}/k}$

$|x_{max}| = \sqrt{-2 \cdot (-11{,}55)/118} = 0{,}4425$ m