Fizika 1 – Mechanika   zh1 2022. márc. 17.   megoldások

Pomeron és Szkirmion a karantén alatt érezték, hogy kezdenek ellustulni és hízni, ezért kitalálták, hogy tudnak otthon sportolni. **Az összes feladatban $g = 10\ m/s^2$.**

1. Pomeron felszerelt egy kosárpalánkot a kert végében. A gyűrű 3,05 m magasan volt, a labdát 1,95 m magasról dobta el. A számoláshoz a labda és a gyűrű középpontjának koordinátáit használjuk.
a) Pomeron még kezdő kosaras, de sok gyakorlással megtanulta azt, hogy mindig pontosan 8 m/s nagyságú kezdősebességgel dobja el a labdát a vízszinteshez képest 55°-kal felfelé. Milyen távol kell álljon Pomeron a gyűrű alatti ponttól, hogy beletaláljon a gyűrűbe? (4 p.)
b) Milyen magasan lesz a Pomeron által eldobott labda a pálya legmagasabb pontján? Mekkora lesz ott a sebessége? Milyen távol lesz ekkor az eldobás helyétől? (4,5 p.)

Megoldás:
a) $v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 8\cdot\cos55° = 4{,}589$ m/s; $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = 8\cdot\sin55° = 6{,}553$ m/s.
A koordinátarendszert vegyük fel úgy, hogy
$z = 0$ a talajon van, így $z_0 = 1{,}95$ m és $z(t^*) = 3{,}05$ m;
$x = 0$ Pomeronnál van, így $x_0 = 0$ és $x(t^*)$ a kérdéses távolsággal egyenlő.
$z(t^*) = z_0 + (v_0 \sin\alpha)\, t^* - ½\, g\, t^{*2}$: $3{,}05 = 1{,}95 + 6{,}553\, t^* - 5\, t^{*2}$
$\rightarrow$ $t^*_1 = 0{,}1977$ s   ill. $t^*_2 = 1{,}113$ s.
A kisebb idő annak felel meg, hogy a labda még felfelé megy, tehát a nagyobb idő lesz a jó megoldás.
$x(t^*) = x_0 + (v_0 \cos\alpha)\, t^* = 4{,}589\cdot1{,}113 = 5{,}107$ m.

b) A legmagasabb ponton $v_z = 0$, tehát a labda sebessége $v = v_x = 4{,}589$ m/s (vízszintes).
Mikor ér oda: $v_z = v_0 \sin\alpha - gt = 6{,}553 - 10t_h = 0$ $\rightarrow$ $t_h = 0{,}6553$ s.
Milyen magasan van: $z(t_h) = 1{,}95 + 6{,}553\, t_h - 5\, t_h^2 = 4{,}097$ m.
Vagy: $h = (v_0\sin\alpha)^2/(2g) = 4{,}589^2/20 = 2{,}147$ m, $z_{max} = z_0 + h = 1{,}95+2{,}147 = 4{,}097$ m.
Milyen távol van az eldobás helyétől:
$x(t_h) = 4{,}589\cdot0{,}6553 = 3{,}007$ m   (ez a fele a $d = v_0^2\sin(2\alpha)/g$ képlettel kiszámolható távolságnak).
Kiinduláskor $\mathbf{r_0} = 0\ \mathbf{i} + 1{,}95\ \mathbf{k}$,
a legfelső ponton $\mathbf{r}(t_h) = 3{,}007\ \mathbf{i} + 3{,}05\ \mathbf{k}$,
az elmozdulásvektor $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_h) - \mathbf{r_0} = 3{,}007\ \mathbf{i} + 1{,}1\ \mathbf{k}$,   a nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = 3{,}695$ m.

2. Pomeron és Szkirmion egy 4 m hosszú deszkát feltámasztottak 14°-os szögben, rátettek egy ládát, amibe beleült Pomeron. Pomeron és a láda tömege összesen 80 kg. A láda és a deszka közötti csúszási súrlódási együttható 0,16; a tapadási súrlódási együttható 0,28.
a) Szkirmion a deszka aljáról 4 m/s kezdősebességgel meglökte felfelé a ládában Pomeront. Mekkora lett Pomeron gyorsulása? Hol volt Pomeron 1,5 s múlva? (4,5 p.)
b) Egyszer csak ott termett a húguk, Gertrúd, és elkezdte őket csúfolni, ők meg bosszúból egy kötelet kötöttek a ládára, a kötelet átvezették egy csigán (a lejtő tetején), a kötél végére egy hintát kötöttek és abba beleültették Gertrúdot. Gertrúd tömege a hintával együtt 35 kg. A ládát (benne Pomeronnal) a deszka közepére tették, Gertrúd lába fél méterrel volt a talaj fölött. Mekkora és milyen irányú volt

Gertrúd gyorsulása, mekkora súrlódási erő hatott a ládára, és mekkora erő feszítette a kötelet? A kötél nyújthatatlan, a csiga súrlódásmentes, a tömegük elhanyagolható. (2,5 p.)

c) Pomeron megelégelte, hogy Gertrúd ott lógjon rajta, leoldotta a kötelet a ládáról és meglökte úgy a ládát, hogy a sebessége 1 m/s legyen lefelé. Mekkora lett ekkor Pomeron gyorsulása? (1,5 p.)

Megoldás:

a) Felfelé felvett pozitív iránnyal

$ma_{fel} = -mg\sin\alpha - F_s$.

Tudjuk, hogy a test mozgásban van, csúszási súrlódási erő hat rá, $F_s = \mu F_{ny}$.

A testre ható nyomóerő $F_{ny} = mg\cos\alpha$, mivel csak m**g**-nek van a lejtőre merőleges komponense.

$ma_{fel} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \rightarrow a_{fel} = -(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,g = -(\sin14°+0{,}16\cdot\cos14°)\cdot10 = -3{,}972$ m/s^2.

$v(t) = v_0 + at = 4-3{,}972t$ és $x(t) = v_0t + ½at^2 = 4t - 1{,}986t^2$, de csak addig, amíg a test mozgásban van és a testre hat a csúszási súrlódási erő. Nézzük meg, mennyi idő alatt áll meg a test:

v=0: $4-3{,}972t_v = 0 \rightarrow t_v = 1{,}007$ s alatt megáll a test, tehát nem számolhatunk úgy, hogy a megadott időt behelyettesítjük az x(t) függvénybe.

$t_v = 1{,}007$ s alatt a test $x(t_v) = 4\cdot1{,}007 - 1{,}986\cdot1{,}007^2 = 2{,}014$ m-re jut el.

Meg kell vizsgálni azt is, hogy ottmarad-e (tapad-e), vagy elkezd visszafelé csúszni.

$mg\sin\alpha = 193{,}5$ N erő gyorsítaná lefelé, a tapadási súrlódási erő maximuma pedig

$F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t mg\cos\alpha = 0{,}28\cdot776{,}2 = 217{,}3$ N.

$F_{t,max} > mg\sin\alpha$, tehát a tapad, nem csúszik vissza, 2,014 m-re lesz a lejtő aljától.

b) Kötél nélkül Gertrúdot (és a hintát) $m_Gg = 35\cdot10 = 350$ N gyorsítaná lefelé,

Pomeront (és a ládát) pedig $m_Pg\sin\alpha = 80\cdot10\cdot\sin14° = 193{,}5$ N a lejtőn lefelé,

tehát kötéllel összekötve súrlódás nélkül Gertrúd lefelé, Pomeron felfelé gyorsulna.

Kérdés, elkezdenek-e mozogni. Tegyük fel, hogy a ládára ható F_t tapadási súrlódási erő miatt nem, vagyis a gyorsulásuk 0:

$m_G a = m_Gg - F_k = 0$

$m_P a = F_k - m_Pg\sin\alpha - F_t = 0$

A tapadáshoz szükséges erő $F_t = m_Gg - m_Pg\sin\alpha = 350-193{,}5 = 156{,}5$ N.

A tapadási súrlódási erő maximális értéke $F_{t,max} = \mu_t F_{ny} = \mu_t mg\cos\alpha = 0{,}28\cdot776{,}2 = 217{,}3$ N.

$F_{t,max} > mg\sin\alpha$, tehát tapad a láda.

Gertrúd gyorsulása zérus volt,

a ládára $F_t = 156{,}5$ N tapadási súrlódási erő hatott,

a kötélerő $F_k = m_Gg = 350$ N volt.

c) Ha a láda lefelé mozog, akkor lefelé felvett pozitív iránnyal

$ma_{le} = mg\sin\alpha - F_s$.

Tudjuk, hogy a test mozgásban van, csúszási súrlódási erő hat rá, $F_s = \mu F_{ny}$.

$ma_{le} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \rightarrow a_{le} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,g = (\sin14° - 0{,}16\cdot\cos14°)\cdot10 = 0{,}8667$ m/s^2.

3. Pomeron és Szkirmion rájöttek, hogy furcsa új képességeik alakultak ki, már képesek tárgyakat távolhatással is mozgatni. A 4 kg-os macskájukon próbálták ki, mit tudnak. A macskára Pomeron

$\mathbf{F_P} = (4t + 32)\,\mathbf{i} + 12\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ [N] erővel hatott (a t időt s-ban értve).

A macskára hat a nehézségi erő is, ezt írjuk fel úgy, hogy a z tengely felfelé mutat.

Szkirmion is fejtett ki erőt a macskára, de az általa kifejtett $\mathbf{F_{Sz}}$ erőt nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a macska gyorsulása

$\mathbf{a} = \left(t + \frac{64}{(t+2)^3}\right)\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k}$ [m/s²] volt.

a) Mekkora erőt fejtett ki Szkirmion a (4 kg-os) macskára? Vektorként adjuk meg az erőt! (2 p.)

b) Mekkora szöget zár be a macskára ható erők eredője és a Pomeron által kifejtett erő a t = 0 s-ban? (3 p.)

c) Adjuk meg a macska sebességvektorát 3 s-ban, ha t = 2 s-ban a sebességvektora zérus volt. (3 p.)

Megoldás:

a) Fel tudjuk írni, hogy

$m\mathbf{a} = \mathbf{F_P} + \mathbf{F_{Sz}} + \mathbf{F_g}$, ahol $\mathbf{F_{Sz}} = F_{Sz,x}\,\mathbf{i} + F_{Sz,y}\,\mathbf{j} + F_{Sz,z}\,\mathbf{k}$ és $\mathbf{F_g} = -mg\,\mathbf{k}$:

$$4\cdot\left[\left(t + \frac{64}{(t+2)^3}\right)\mathbf{i} - 10\,\mathbf{k}\right] = \left[(4t+32)\,\mathbf{i} + 12\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathbf{j}\right] + \left[F_{Sz,x}\,\mathbf{i} + F_{Sz,y}\,\mathbf{j} + F_{Sz,z}\,\mathbf{k}\right] + \left[-4\cdot 10\,\mathbf{k}\right]$$

$$\left(4t + \frac{256}{(t+2)^3}\right)\mathbf{i} - 40\,\mathbf{k} = \left[4t + 32 + F_{Sz,x}\right]\mathbf{i} + \left[12\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + F_{Sz,y}\right]\mathbf{j} + \left[F_{Sz,z} - 40\right]\mathbf{k}$$

$$\left(4t + \frac{256}{(t+2)^3}\right) = 4t + 32 + F_{Sz,x} \quad\rightarrow\quad F_{Sz,x} = \frac{256}{(t+2)^3} - 32$$

$$0 = 12\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + F_{Sz,y} \quad\rightarrow\quad F_{Sz,y} = -12\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$-40 = F_{Sz,z} - 40 \quad\rightarrow\quad F_{Sz,z} = 0$$

$$\mathbf{F_{Sz}} = \left(\frac{256}{(t+2)^3} - 32\right)\mathbf{i} - 12\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathbf{j}\ \text{[N]}$$

b) Az eredő erő helyett számolhatunk a gyorsulással is, mivel az irányuk megegyezik, tehát

$$\mathbf{a}(0) = \left(0 + \frac{64}{(0+2)^3}\right)\mathbf{i} - 10\,\mathbf{k} = 8\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{k}, \qquad |\mathbf{a}(0)| = \sqrt{164}$$

$$\mathbf{F_P}(0) = (4\cdot 0 + 32)\,\mathbf{i} + 12\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)\mathbf{j} = 32\,\mathbf{i} + 12\,\mathbf{j}, \qquad |\mathbf{F_P}(0)| = \sqrt{1168}$$

$$\mathbf{a}(0)\cdot\mathbf{F_P}(0) = 8\cdot 32 + 0\cdot 12 + (-10)\cdot 0 = 256$$

$$\cos\varphi = 256/(\sqrt{164}\cdot\sqrt{1168}) = 0{,}5849 \quad\rightarrow\quad \varphi = 54{,}20°$$

c) $a_x = t + \frac{64}{(t+2)^3} \rightarrow v_x(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{32}{(t+2)^2} + k_x$ és tudjuk, hogy $v_x(2) = 0$

$$v_x(2) = \frac{2^2}{2} - \frac{32}{(2+2)^2} + k_x = 2 - 2 + k_x = k_x \rightarrow k_x = 0 \rightarrow v_x(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{32}{(t+2)^2}$$

$a_y = 0 \rightarrow v_y(t) = k_y$ és tudjuk, hogy $v_y(2) = 0 \rightarrow k_y = 0 \rightarrow v_y(t) = 0$

$a_z = -10 \rightarrow v_z(t) = -10t + k_z$ és tudjuk, hogy $v_z(2) = 0$

$$v_z(2) = -10\cdot 2 + k_z = -20 + k_z \rightarrow k_z = 20 \rightarrow v_z(t) = -10t + 20$$

$$\mathbf{v}(t) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{32}{(t+2)^2}\right)\mathbf{i} + (-10t + 20)\,\mathbf{k}\ \text{[m/s]}$$

$$\mathbf{v}(3) = \left(\frac{3^2}{2} - \frac{32}{(3+2)^2}\right)\mathbf{i} + (-10\cdot 3 + 20)\,\mathbf{k} = 3{,}22\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{k}\ \text{[m/s]}$$