Fizika1 – Mechanika számolási gyakorlat zh1 megoldások 2021. márc. 12. Moodle

KINEMATIKA

Egy test sebességét a következő függvény írja le:

$$\mathbf{v} = (A\,t + B)^3\ \mathbf{i}\ + C\,e^{t/D}\ \mathbf{j}\quad [\mathrm{m/s}]$$

A t idő s-ban értendő.
A test a t = 0 s-ban az origóból indul.

A, B, C, D, t_1 és t_2 véletlenszerűen megadott értékek voltak.
Pl. $A = 0{,}7\ \mathrm{m}^{(1/3)}\mathrm{s}^{(-4/3)}$; $B = 4{,}6\ \mathrm{m}^{(1/3)}\mathrm{s}^{(-1/3)}$; $C = 333$ m/s; $D = 8$ s; $t_1 = 4$ s; $t_2 = 9$ s.

a) Számolja ki a gyorsulás x komponensét t_1 s-ban! (1 pont)

$a_x = 3A\,(At_1 + B)^2$

$a_x = 3\cdot0{,}7\cdot(0{,}7\cdot4 + 4{,}6)^2 = 115{,}0\ \mathrm{m/s^2}$

b) Számolja ki a gyorsulás y komponensét t_1 s-ban! (1 pont)

$a_y = C/D\ e^{t_1/D}$

$a_y = 333/8\cdot\ e^{4/8} = 68{,}63\ \mathrm{m/s^2}$

c) Számolja ki a test helyvektorának x komponensét t_1 s-ban! (1,5 pont)

$x = \{\ (At_1 + B)^4 - B^4\ \}\ /\ (4A)$

$x = \{\ (0{,}7\cdot4 + 4{,}6)^4 - 4{,}6^4\ \}\ /\ (4\cdot0{,}7) = 911{,}0$ m

d) Számolja ki a test helyvektorának y komponensét t_1 s-ban! (1,5 pont)

$y = CD\ (\ e^{t_1/D} - 1)$

$y = 333\cdot8\ (\ e^{4/8} - 1) = 1728$ m

e) Számolja ki a test átlagos gyorsulásának nagyságát a $t_1 \rightarrow t_2$ intervallumban! (1,5 pont)

$\mathbf{a}_{\text{átl}} = \Delta\mathbf{v}\ /\ \Delta t = (\ \mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)\ )\ /\ (t_2 - t_1) =$

$= \{\ [\ (At_2 + B)^3 - (At_1 + B)^3\ ]\ \mathbf{i}\ + C\ (\ e^{t_2/D} - e^{t_1/D}\ )\ \mathbf{j}\ \}\ /\ (t_2 - t_1) \quad \rightarrow \quad$ absz. érték: ...

$\mathbf{a}_{\text{átl}} = \{\ [\ (0{,}7\cdot9 + 4{,}6)^3 - (0{,}7\cdot4 + 4{,}6)^3\ ]\ \mathbf{i}\ + 333\ (\ e^{9/8} - e^{4/8}\ )\ \mathbf{j}\ \}\ /\ (9 - 4) =$

$= (\ 889{,}8\ \mathbf{i} + 476{,}7\ \mathbf{j}\ )\ /\ 5 = 178{,}0\ \mathbf{i} + 95{,}34\ \mathbf{j}\ \ [\mathrm{m/s^2}]$

$|\mathbf{a}_{\text{átl}}| = \sqrt{(178{,}0^2 + 95{,}34^2)} = 201{,}9\ \mathrm{m/s^2}$

f) Számolja ki, mekkora szöget zár be a sebességvektor a t_1 -ben a

$\mathbf{p} = 3\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 4\ \mathbf{k}$

$\mathbf{p} = 4\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 3\ \mathbf{k}$

$\mathbf{p} = 0\ \mathbf{i} + 3\ \mathbf{j} + 4\ \mathbf{k}$

$\mathbf{p} = 0\ \mathbf{i} + 4\ \mathbf{j} + 3\ \mathbf{k}$

vektorral! A szöget fokban adja meg! (1,5 pont)

$\mathbf{p} = p_x\ \mathbf{i} + p_y\ \mathbf{j} + p_z\ \mathbf{k}$ véletlenszerűen dobódott fel.

Skalárszorzattal:

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(t_1) = p_x v_x(t_1) + p_y v_y(t_1) + p_z v_z(t_1)$

$v_z = 0$, és vagy p_x, vagy p_y is zérus, tehát

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(t_1)$ vagy $p_x v_x(t_1) = p_x (At_1 + B)^3$, vagy $p_y v_y(t_1) = p_y C e^{t_1/D}$

$\mathbf{p} = 3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ esetén $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(t_1) = 3 \cdot (0{,}7\cdot 4 + 4{,}6)^3 = 1216$ [m/s]

$\mathbf{p} = 0\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ esetén $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(t_1) = 4 \cdot 333 \cdot e^{4/8} = 2196$ [m/s]

$|\mathbf{v}(t_1)| = \sqrt{(v_x(t_1)^2 + v_y(t_1)^2)}$;

$|\mathbf{v}(t_1)| = \sqrt{(((At_1+B)^3)^2 + C^2 e^{2t_1/D})} = \sqrt{((0{,}7\cdot 4 + 4{,}6)^6 + 333^2 \cdot e^{2\cdot 4/8})} = 682{,}4$ m/s

$|\mathbf{p}| = \sqrt{(3^2+4^2)} = 5$

$\cos\varphi = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}(t_1) / (|\mathbf{v}(t_1)| \cdot |\mathbf{p}|)$

$\mathbf{p} = 3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ esetén $\cos\varphi = 1216/(682{,}4\cdot 5) = 0{,}3563 \rightarrow \varphi = 69{,}13°$

$\mathbf{p} = 0\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ esetén $\cos\varphi = 2196/(682{,}4\cdot 5) = 0{,}6437 \rightarrow \varphi = 49{,}93°$

HAJÍTÁS

Eldobtunk egy követ v_0 kezdősebességgel, a vízszinteshez képest ferdén felfelé α szögben. A követ az x_0 koordinátájú pontból dobtuk az origó irányába ismeretlen z_0 magasságból. $g = 10$ m/s^2.
v_0, α, x_0, t_1 és φ véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl. $v_0 = 4{,}8$ m/s; $\alpha = 35°$; $x_0 = -11$ m; $t_1 = 1{,}6$ s; $\varphi = 15°$

a) Mennyi lesz az x koordinátája t_1 s múlva? (1 pont)

$x(t_1) = x_0 + v_0 \cos\alpha \cdot t_1$

$x(t_1) = -11 + 4{,}8 \cos 35° \cdot 1{,}6 = -4{,}709$ m

b) Mennyivel változik a z koordinátája t_1 s alatt? (1 pont)

$\Delta z = z(t_1) - z_0 = (z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - ½\, g\, t_1^2) - z_0 = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - ½\, g\, t_1^2$

$\Delta z = v_0 \sin\alpha \cdot t_1 - ½\, g\, t_1^2 = 4{,}8 \sin 35° \cdot 1{,}6 - 5 \cdot 1{,}6^2 = -8{,}395$ m

c) Mekkora a kő sebességének nagysága t_1 s múlva? (1,5 pont)

$\mathbf{v}(t_1) = v_0 \cos\alpha\, \mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha - g\, t_1)\, \mathbf{k}$ $\rightarrow$ absz. érték …

$\mathbf{v}(t_1) = 4{,}8 \cos 35°\, \mathbf{i} + (4{,}8 \sin 35° - 10\cdot 1{,}6)\, \mathbf{k} = 3{,}932\, \mathbf{i} - 13{,}25\, \mathbf{k}$

$\rightarrow$ $|\mathbf{v}(t_1)| = \sqrt{(3{,}932^2 + (-13{,}25)^2)} = 13{,}82$ m/s

d) Milyen magasról kell eldobni a követ, hogy az origóba érkezzen? (2 pont)

$x(t^*) = x_0 + v_0 \cos\alpha \cdot t^* = 0 \rightarrow t^* = -x_0 / (v_0 \cos\alpha)$ idő alatt lesz az x koordináta zérus, ekkor kell a z koordinátának is zérusnak lennie:

$z(t^*) = z_0 + v_0 \sin\alpha \cdot t^* - ½\, g\, t^{*2} = 0 \rightarrow z_0 = -v_0 \sin\alpha \cdot t^* + ½\, g\, t^{*2}$

$-11 + 4{,}8 \cos 35° \cdot t^* = 0 \rightarrow t^* = 2{,}798$ s

$\rightarrow z_0 = -4{,}8 \sin 35° \cdot 2{,}798 + 5 \cdot 2{,}798^2 = 31{,}43$ m

e) Mikor zár be a kő sebessége φ szöget a vízszintessel a pálya csúcspontja után? (1,5 pont)

A test már lefelé zuhan, tehát v_z és φ negatív!

A φ szög tangensét fel tudjuk írni a sebességvektor komponenseiből:

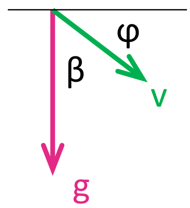
$\mathbf{v}(t) = v_x\,\mathbf{i} + v_z\,\mathbf{k} = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha - g\,t)\,\mathbf{k}$

$\mathrm{tg}\varphi = v_z / v_x = (v_0 \sin\alpha - g\,t) / (v_0 \cos\alpha) = \mathrm{tg}\alpha - g / (v_0 \cos\alpha) \cdot t$

$\rightarrow \quad t = (v_0 \cos\alpha) / g \cdot (\,\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\varphi\,)$

$t = (4{,}8 \cos 35°) / 10 \cdot (\,\mathrm{tg}35° - \mathrm{tg}(-15°)\,) = 0{,}3807$ s

f) Mekkora szöget zár be ekkor a sebességvektor a gyorsulásvektorral? (1 pont)



A gyorsulásvektor, **g**, függőlegesen lefelé mutat,

tehát a két vektor által bezárt szög $\beta = 90° - \varphi$.

$\beta = 90° - 15° = 75°$.

DINAMIKA

Egy hosszú, α hajlásszögű lejtő közepére egy m tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható μ, a tapadási súrlódási együttható μ_t. $g = 10$ m/s^2.

α, m, μ és μ_t véletlenszerűen megadott értékek voltak.

Pl. $\alpha = 18°$; $m = 0{,}8$ kg; $\mu = 0{,}17$; $\mu_t = 0{,}45$

a) Mekkora a test gyorsulása, ha $v_0 = 0{,}5$ m/s kezdősebességgel meglökjük lefelé? A kezdősebesség irányát vegyük fel pozitív iránynak! (1,5 pont)

A lejtőn lefelé hat mg-nek az $mg \sin\alpha$ komponense (pozitív előjel),

a lejtőn felfelé a csúszási súrlódási erő, aminek nagysága $F_s = \mu F_{ny}$ (negatív előjel),

jelen esetben $F_s = \mu\, mg \cos\alpha$

(mivel csak mg-nek van a lejtőre merőleges komponense, ezért $F_{ny} = mg \cos\alpha$)

$\rightarrow$ lefelé a gyorsulás nagysága $a_{le} = (\sin\alpha - \mu \cos\alpha)\, g$

$a_{le} = (\sin 18° - 0{,}17 \cos 18°) \cdot 10 = 1{,}473$ m/s^2

b) Mekkora a test gyorsulása, ha $v_0 = 1{,}2$ m/s kezdősebességgel meglökjük felfelé? A kezdősebesség irányát vegyük fel pozitív iránynak! (1 pont)

A csúszási súrlódási erő most lefelé hat, egy irányba mutat az $mg \sin\alpha$ komponenssel, mindkettő negatív előjelű (mert a kezdősebesség felfelé mutat)

$\rightarrow$ felfelé a gyorsulás nagysága $a_{fel} = -(\sin\alpha + \mu \cos\alpha)\, g$

$a_{fel} = -(\sin 18° + 0{,}17 \cos 18°) \cdot 10 = -4{,}707$ m/s^2

c) Mekkora súrlódási erő hat a testre, ha nem lökjük meg semerre? (1 pont)

A testet a lejtőn lefelé mg-nek az mg sinα komponense gyorsítaná,
ha nem hatna tapadási súrlódási erő.

A tapadási súrlódási erő maximális lehetséges értéke $F_{t,max} = \mu_t$ mg cosα.

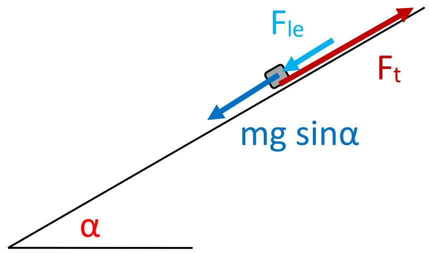
Ha mg sinα > $F_{t,max}$, akkor a test elkezd csúszni,
és a testre $F_s = \mu$ mg cosα nagyságú csúszási súrlódási erő hat.

Ha mg sinα < $F_{t,max}$, akkor a test nem kezd el csúszni, tapad,
a testre F_t = mg sinα nagyságú tapadási súrlódási erő hat.

A megadott értékek olyanok voltak, hogy a test tapadt,
tehát a helyes válasz F_t = mg sinα volt.

F_t = mg sinα = 0,8·10·sin18° = 2,472 N.

d) Legalább mekkora lejtővel párhuzamos erő kell ahhoz, hogy a test elkezdjen gyorsulni lefelé a lejtőn? (1,5 pont)



A testet lefelé akarjuk gyorsítani (és mg sinα is lefelé hat), ezért a tapadási súrlódási erő felfelé hat.

Ha a test nyugalomban van, akkor F_t = mg sinα + F_{le} ;

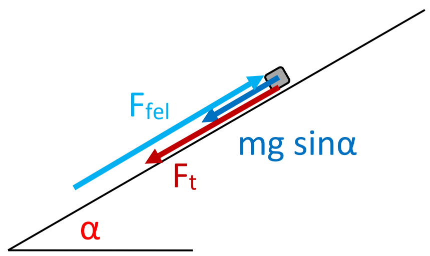
a test addig van nyugalomban, amíg $F_t < F_{t,max}$; $F_{t,max} = \mu_t$ mg cosα ,

tehát amíg mg sinα + $F_{le} < \mu_t$ mg cosα, azaz $F_{le} < \mu_t$ mg cosα – mg sinα

→ a test akkor kezd gyorsulni, amikor $F_{le} > \mu_t$ mg cosα – mg sinα = mg (μ_t cosα – mg sinα).

F_{le} > 0,8·10 (0,45 cos18° – sin18°) = 0,9517 N.

e) Legalább mekkora lejtővel párhuzamos erő kell ahhoz, hogy a test elkezdjen gyorsulni felfelé a lejtőn? (1 pont)



A testet felfelé akarjuk gyorsítani, ezért a tapadási súrlódási erő lefelé hat.

Ha a test nyugalomban van, akkor F_t + mg sinα = F_{fel} → $F_t = F_{fel}$ – mg sinα ;

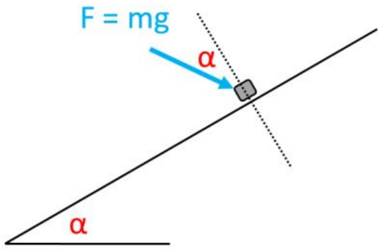
a test addig van nyugalomban, amíg $F_t < F_{t,max}$; $F_{t,max} = \mu_t$ mg cosα ,

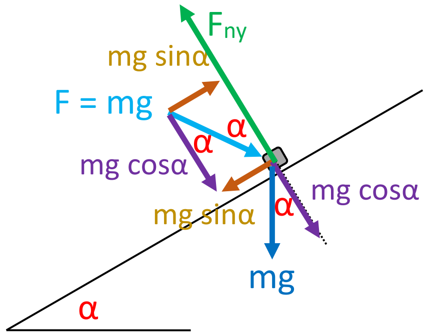
tehát amíg F_{fel} – mg sinα < μ_t mg cosα, azaz $F_{fel} < \mu_t$ mg cosα + mg sinα

→ a test akkor kezd gyorsulni, amikor $F_{fel} > \mu_t$ mg cosα + mg sinα = mg (μ_t cosα + mg sinα).

F_{fel} > 0,8·10 (0,45 cos18° + sin18°) = 5,896 N.

f) Mekkora a test gyorsulása, ha az ábra szerinti irányú F = mg nagyságú erővel hatunk a testre? (1 pont)





Az **F** erő lejtővel párhuzamos komponensének a nagysága F sinα, és mivel F = mg, ezért a nagysága ugyanakkora, mint a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense, de ellentétes irányba mutat vele, ezért a test gyorsulása zérus.

g) Mekkora a lejtő által a testre kifejtett nyomóerő nagysága az ábra szerinti erő esetén? (1 pont)

Az **F** erő lejtőre merőleges komponensének a nagysága F cosα, és mivel F = mg, ezért a nagysága ugyanakkora, mint a nehézségi erő lejtőre merőleges komponense. Mindkét komponens befelé hat a lejtő síkjára merőlegesen, tehát F_{ny} = 2 mg cosα.

F_{ny} = 2 mg cosα = 2·0,8·10 cos18° = 15,22 N.