KINEMATIKA

Egy test sebességét a következő függvény írja le:
$\mathbf{v} = 3\,(t - A)^2\,\mathbf{i} - B\,/\,(t + 1)^2\,\mathbf{j} + (\pi/2)\sin(3\pi t)\,\mathbf{k}$ [m/s]
A t idő s-ban értendő.
A test a t = 0 s-ban az origóból indul.
A és B random generált értékek voltak.

a) Számolja ki a gyorsulás x komponensét t = 0 s-ban! (1 pont)
MO. $a_x(t) = 6\,(t - A)$; $a_x(0) = -6A$ m/s^2

b) Számolja ki a gyorsulás y komponensét t = 0 s-ban! (1 pont)
MO. $a_y(t) = -2B\,(t + 1)^{-3}$; $a_y(0) = -2B$ m/s^2

c) Számolja ki a gyorsulás z komponensét t = 0 s-ban! (1 pont)
MO. $a_z(t) = (3\pi^2/2)\cos(3\pi t)$; $a_z(0) = 3\pi^2/2 = 14{,}80$ m/s^2

d) Számolja ki a helyvektor x komponensét t s-ban! (1,5 pont)
MO.
határozott integrállal:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x\,dt = 0 + \int_0^t 3(t-A)^2\,dt = [(t-A)^3]_0^t = (t-A)^3 - (-A^3) = (t-A)^3 + A^3$$

határozatlan integrállal:

$$x(t) = \int_0^t v_x\,dt + k_x = \int_0^t 3(t-A)^2\,dt + k_x = (t-A)^3 + k_x$$

t = 0 -ban $x_0 = 0$ kell legyen: $x(0) = (0-A)^3 + k_x = -A^3 + k_x = x_0 = 0 \rightarrow k_x = A^3$, $x(t) = (t-A)^3 + A^3$

e) Számolja ki a helyvektor y komponensét t s-ban! (1,5 pont)
MO.
határozott integrállal:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y\,dt = 0 + \int_0^t -B(t+1)^{-2}\,dt = \left[B(t+1)^{-1}\right]_0^t = B(t+1)^{-1} - B$$

határozatlan integrállal:

$$y(t) = \int_0^t v_y\,dt + k_y = \int_0^t -B(t+1)^{-2}dt + k_y = B(t+1)^{-1} + k_y$$

t = 0 -ban $y_0 = 0$ kell legyen: $y(0) = B(0+1)^{-1} + k_y = B + k_y = y_0 = 0 \rightarrow k_y = -B$, $y(t) = B(t+1)^{-1} - B$

f) Számolja ki a helyvektor z komponensét t s-ban! (1,5 pont)
MO.
határozott integrállal:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t v_z\,dt = 0 + \int_0^t \frac{\pi}{2}\sin(3\pi t)\,dt = \left[-\frac{\pi}{2\cdot 3\pi}\cos(3\pi t)\right]_0^t = -\frac{1}{6}\cos(3\pi t) - \left(-\frac{1}{6}\cos(0)\right) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cos(3\pi t)$$

határozatlan integrállal:

$$z(t) = \int_0^t v_z\,dt + k_z = \int_0^t \frac{\pi}{2}\sin(3\pi t)\,dt + k_z = -\frac{1}{6}\cos(3\pi t) + k_z$$

t = 0 -ban $z_0 = 0$ kell legyen: $z(0) = -\frac{1}{6}\cos(3\pi\cdot 0) + k_z = -\frac{1}{6} + k_z = z_0 = 0 \rightarrow k_z = \frac{1}{6}$, $z(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\cos(3\pi t)$

g) Számolja ki, mekkora szöget zár be a sebességvektor a t = 0 s-ban a
p1 = 1 **i** + 1 **k** ill. **p2 =** 1 **j** + 1 **k** vektorral! (véletlenszerűen változott)
A szöget fokban adja meg! (1,5 pont)

MO.
$\mathbf{v}(0) = 3A^2\,\mathbf{i} - B\,\mathbf{j}$, $|\mathbf{v}(0)| = \sqrt{9A^4 + B^2}$
$|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$

p1 = 1 **i** + 1 **k** esetén $\mathbf{v}(0)\cdot\mathbf{p1} = 3A^2$, $\cos\varphi = 3A^2/\sqrt{2(9A^4 + B^2)}$

p2 = 1 **j** + 1 **k** esetén $\mathbf{v}(0)\cdot\mathbf{p2} = -B$, $\cos\varphi = -B/\sqrt{2(9A^4 + B^2)}$

HAJÍTÁS

Eldobtunk egy m tömegű testet z_0 magasról v_0 kezdősebességgel, a vízszintesthez képest ferdén felfelé φ fokkal. $g = 10\ m/s^2$.
m, z_0, v_0 és φ random generált értékek voltak.

a) Mennyivel változik az x koordinátája t s alatt? (1 pont)
MO. $x(t) = v_0 \cos\varphi \cdot t$

b) Milyen magasan van a földhöz képest t = {ht} s múlva? (A megadott kezdeti magasság is a földhöz képest értendő.) (1,5 pont)
MO. $z(t) = z_0 + v_0 \sin\varphi \cdot t - ½\, g\, t^2$

c) Mennyivel változott az x koordinátája a testnek az eldobáséhoz képest, amikor a pálya legfelső pontján van? (1,5 pont)
MO.
Megoldhatjuk úgy, hogy kiszámoljuk az időt, amikor a legfelső pontra ér:
$v_z = v_0 \sin\varphi - g\, t_h = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = v_0 \sin\varphi / g$,
és behelyettesítjük x(t) -be $\rightarrow \quad x_h = v_0 \cos\varphi \cdot v_0 \sin\varphi / g = v_0^2 \sin(2\varphi) / (2g)$.
Vagy felismerhetjük, hogy ez az x távolság éppen a fele annak a távolságnak, amit a hajítás d távolságának nevezünk, és tudjuk, hogy $d = v_0^2 \sin(2\varphi) / g$, tehát $x_h = d / 2 = v_0^2 \sin(2\varphi) / (2g)$.

d) Mennyivel van magasabban a test az eldobás magasságához képest, amikor a pálya legfelső pontján van? (1 pont)
MO.
Alkalmazhatjuk a $h = v_0^2 \sin^2\alpha / (2g)$ képletet,
vagy ugyanerre eljuthatunk, ha a **c)**-ben kiszámolt időt behelyettesítjük z(t) -be, és levonjuk belőle z_0 -t.

e) Milyen távol van a pálya legfelső pontja az eldobás helyétől? (1 pont)
MO. Pithagorasz-tétellel

f) véletlenszerűen feldobott képrehúzás

DINAMIKA

Egy s hosszú, α hajlásszögű lejtő tetejére egy m tömegű testet helyezünk, majd kezdősebesség nélkül elengedjük. A tapadási súrlódási erő nem elég nagy ahhoz, hogy a test nyugalomban maradjon, a test elkezd csúszni. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható értéke μ. $g = 10\ m/s^2$.

s, α, m, és μ random generált értékek voltak, ill. a d) feladatnak 3 változata volt.

a) Mekkora a test gyorsulása? (2 pont)

MO. $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

b) Mennyi idő alatt ér le a test a lejtő aljára? (1 pont)

MO. $t = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$

c) Mekkora a test sebessége a lejtő alján? (1 pont)

MO. $v = \sqrt{2sg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$

d1) Egy s hosszú, α hajlásszögű lejtő aljára egy m tömegű testet helyezünk. Mekkora állandó nagyságú F erővel kell húznunk a testet a lejtővel párhuzamosan felfelé, ha azt szeretnénk, hogy ugyanannyi idő alatt érjen fel a lejtő tetejére, mint amennyi idő alatt a lejtő tetejéről a lejtő aljára ér, ha a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indult el, és közben nem húztuk? (Ld. a **b)** feladatban kiszámolt értéket.)

A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható értéke μ. (4 pont)

MO.

$ma = F - mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha$

az ebből származó gyorsulás meg kell egyezzen az **a)** feladat gyorsulásával (mivel az idő megegyezik)

$\rightarrow \rightarrow\ F = 2mg\sin\alpha$

d2) Egy s hosszú, α hajlásszögű lejtő aljára egy m tömegű testet helyezünk, kötelet rögzítünk hozzá, a kötelet átvezetjük a lejtő tetején levő csigán, és a kötél másik végére egy M tömegű testet rögzítünk (ez a test függőlegesen lóg a kötél másik végén). Mekkora kell legyen az M tömeg, ha azt szeretnénk, hogy az m tömegű test ugyanannyi idő alatt érjen fel a lejtő aljáról a tetejére, mint amennyi idő alatt a lejtő tetejéről a lejtő aljára ér, ha önmagában (kötél és M tömeg nélkül) a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indult el? (Ld. a **b)** feladatban kiszámolt értéket.)

A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható értéke μ. (4 pont)

MO.

$ma = F_k - mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha$ és $Ma = Mg - F_k$

az ebből származó gyorsulás meg kell egyezzen az **a)** feladat gyorsulásával (mivel az idő megegyezik)

$\rightarrow \rightarrow\ M = \frac{2m\sin\alpha}{1 - \sin\alpha + \mu\cos\alpha}$

d3) Egy s hosszú, α hajlásszögű lejtő aljára egy m tömegű testet helyezünk. Mekkora kezdősebességet kell adni a testnek, ha azt szeretnénk, hogy ugyanannyi idő alatt érjen fel a lejtő tetejére, mint amennyi idő alatt a lejtő tetejéről a lejtő aljára ér, ha a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indult el? (Ld. a **b)** feladatban kiszámolt értéket.)

A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható értéke μ. (4 pont)

MO.

$a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

$s = v_0 t + ½ a t^2 = v_0 t - ½ g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) t^2$; t megegyezik a **b)**-ben szereplővel

$\rightarrow \rightarrow\ v_0 = \sin\alpha\sqrt{\frac{2gs}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}}$