Eddigi ismeretek:
mozgásegyenlet $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$
$\rightarrow$ megoldása: $\mathbf{r}(t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$, azaz a hely és a sebesség az idő függvényében.
Ebből kifejezhető a sebesség a hely függvényében, ha az időt kiküszöböljük.

Munkatétel: a sebesség nagysága és a test helye között ad összefüggést. Olyan esetekben, amikor az időre nincs szükségünk, csak a hely és a sebesség nagysága közötti összefüggésre, sokkal gyorsabb a számolás a munkatétel alkalmazásával.

Munkatétel
Mindig érvényes, akkor is, ha a testre hatnak nem konzervatív – csúszási súrlódási, közegellenállási – erők is.

$W_{össz} = \Delta E_{kin}$, ahol
$W_{össz}$ a testre ható összes erő által végzett munka összege (azaz az eredő erő által végzett munka);
$E_{kin} = ½mv^2$ a mozgási energia;
$\Delta E_{kin} = E_{kin,\,vég} - E_{kin,\,kezdő}$.

Az előadáson használt jelöléssel:
$W_e = \Delta K$, ahol
W_e az eredő erő által végzett munka;
$K = ½mv^2$ a mozgási energia;
$\Delta K = K_2 - K_1$.

Munka
Általános definíciója:
$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$$
Az erőnek az elmozdulás irányába eső vetülete végez munkát.
Állandó **F** erő és egyenes vonalú mozgás esetén
$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$ (az erővektor és az elmozdulásvektor skalárszorzata);
a nagysága
$W = |\mathbf{F}| \cdot |\Delta\mathbf{r}| \cdot \cos\varphi$ (φ az erővektor és az elmozdulásvektor által bezárt szög).

Az egyes kölcsönhatásokban fellépő erők által végzett munka

kölcsönhatás	erőtörvény	munka		
nyomóerő, és egyéb sebességre merőleges kényszererők (pl. kötél körpályánál)		0	zérus, mert az erővektor és az elmozdulásvektor merőlegesek egymásra	
gravitációs erő a Föld felszínén***	$\mathbf{F_g} = -\,mg\,\mathbf{k}$	$W_{z_1\rightarrow z_2} = -\left((mgz_2) - (mgz_1)\right)$	a kezdő- és a végpont helyétől függ, de az azokat összekötő úttól nem	konzervatív
általános gravitációs erő	$\mathbf{F_g} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathbf{e_r}$	$W_{r_1\rightarrow r_2} = -\left(\left(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r_2}\right) - \left(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r_1}\right)\right)$	a kezdő- és a végpont helyétől függ, de az azokat összekötő úttól nem	konzervatív
rugóerő	$\mathbf{F_r} = -kx\,\mathbf{i}$	$W_{x_1\rightarrow x_2} = -\left(\left(\frac{1}{2}k{x_2}^2\right) - \left(\frac{1}{2}k{x_1}^2\right)\right)$	a kezdő- és a végpont helyétől függ, de az azokat összekötő úttól nem	konzervatív
csúszási súrlódási erő	$\mathbf{F_s} = -\,\mu\,F_{ny}\,\frac{\mathbf{v}}{v}$	$W_{r_1\rightarrow r_2} = -\mu F_{ny}\cdot s$	negatív, mert az erővektor és az elmozdulásvektor (a sebesség) ellentétes irányú	disszipatív
közegellenállási erő	$\mathbf{F_{közeg}} = -\,b\,\mathbf{v}$ ill. $\mathbf{F_{közeg}} = -\,c\,v\,\mathbf{v}$	$W_{\mathbf{r_1}\rightarrow \mathbf{r_2}} = -b\int_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r_2}} v(\mathbf{r})\,ds$ ill. $W_{\mathbf{r_1}\rightarrow \mathbf{r_2}} = -c\int_{\mathbf{r_1}}^{\mathbf{r_2}} v(\mathbf{r})^2\,ds$	negatív, mert az erővektor és az elmozdulásvektor (a sebesség) ellentétes irányú	disszipatív

***Előadáson más a függőleges koordináta jelölése! $\mathbf{F_g} = -\,mg\,\mathbf{j}$, $W_{y_1\rightarrow y_2} = -(mgy_2 - mgy_1)$

Konzervatív erők, potenciális energiák

kölcsönhatás	erőtörvény	helyzeti energia ***	hol legyen $E_{pot} = 0$?
gravitációs erő a Föld felszínén	$\mathbf{F} = -\,mg\,\mathbf{k}$	$E_{pot} = mgz$	z = 0 célszerűen választható
általános gravitációs erő	$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e_r}$	$E_{pot} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$	a „végtelen távoli” pontban
rugóerő	$\mathbf{F} = -\,kx\,\mathbf{i}$	$E_{pot} = ½\,kx^2$	a rugó nyugalmi hosszánál

***Az előadáson használt jelölés: a potenciális energiát U jelöli,
tehát $U = mgy$, ill. $U = ½\,kx^2$, ill. $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$.

Az adott erő által végzett munka számolása a hozzá tartozó potenciális energiából:

$$W_{\mathbf{r_1} \to \mathbf{r_2}} = -\,\Delta E_{pot} = E_{pot}(\mathbf{r_1}) - E_{pot}(\mathbf{r_2}) = E_{pot,\,kezdő} - E_{pot,\,vég}$$

Ekkora munkát végez az adott erő. Ha mi végzünk munkát az adott erő ellenében, akkor ennek ellentettjét kell venni.

Mechanikai energia: $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$
E_{pot} a megfelelő tagokat tartalmazza (ld. a fenti táblázatot; lehet egyszerre több tag is benne).

Mechanikai energia megmaradás
Akkor érvényes, ha csak konzervatív erők és kényszererők hatnak a testre.
Ilyenkor E_{mech} a mozgás során állandó:

$$E_{mech}(\mathbf{r}) = \text{konst.}\,, \quad E_{mech}(\mathbf{r_1}) = E_{mech}(\mathbf{r_2})\,.$$

Ha fellépnek disszipatív erők (súrlódási erő, közegellenállási erő) is, akkor a test mechanikai energiája csökken; ilyenkor a mechanikai energia egy része belső energiává alakul, a test melegszik.
A mechanikai energia csökken akkor is, ha fellép deformációs erő, ami a test maradandó alakváltozását okozza (ld. később a rugalmatlan ütközéseknél).

Alkalmazás ferde hajításnál: $½\,mv^2 + mgz = \text{konst.}$
z_0 magasságból v_0 kezdősebességgel induló test esetén az összes energia
$E_{mech,\,0} = ½\,mv_0^2 + mg\,z_0$.
Látható, hogy azonos magasságra visszaérve a sebesség nagysága megegyezik a kezdősebességgel.
A pálya legfelső pontján: $E_{mech,\,fent} = ½\,mv_{fent}^2 + mg\,(z_0+h)$;
felírva az egyenlőséget a kiindulási helyzettel:
$E_{mech,\,fent} = E_{mech,\,0}$: $½\,mv_{fent}^2 + mg\,(z_0+h) = ½\,mv_0^2 + mg\,z_0$.
Felhasználva, hogy $v_{fent} = v_x$ (mert v_{fent} vízszintes), és hogy $v_0^2 = v_x^2 + v_{0z}^2$:
$½\,mv_x^2 + mg\,(z_0+h) = ½\,m(v_x^2+v_{0z}^2) + mg\,z_0$, egyszerűsítés után (v_x = konst.)
$\rightarrow$ $h = v_{0z}^2 / (2g)$ megkapjuk a már ismert képletet a hajítás magasságára.
Földet éréskor z = 0 (ha z_0 a föld feletti magasságot jelenti): $E_{mech,\,föld} = ½\,mv_{föld}^2 + 0$;
felírva az egyenlőséget a kiindulási helyzettel:
$E_{mech,\,föld} = E_{mech,\,0}$: $½\,mv_{föld}^2 + 0 = ½\,mv_0^2 + mg\,z_0$
$\rightarrow$ $v_{föld} = \sqrt{v_0^2 + 2gz_0}$ a földet érés sebességének a nagysága.
Súrlódásmentes felületen (sík vagy görbült lejtőn) mozgó, ill. kötél végéhez rögzített test esetén is érvényesek ezek az összefüggések, mivel a kényszererők munkája zérus.

Alkalmazás rezgőmozgásnál: $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{konst.}$
A rezgőmozgás egyensúlyi helyzetében vízszintes helyzetű rugónál $x = 0$ és $v = v_{max}$
$\rightarrow \quad E_{mech,\,0} = \frac{1}{2} mv_{max}^2$;
A rezgőmozgás szélső helyzetében $x = A$ és $v = 0$
$\rightarrow \quad E_{mech,\,A} = \frac{1}{2} kA^2$.
A két speciális eset egyenlőségéből $E_{mech,\,0} = E_{mech,\,A}$: $\frac{1}{2} mv_{max}^2 = \frac{1}{2} kA^2 \rightarrow v_{max} = A\sqrt{k/m}$ $= A\omega$.
Általánosan $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv_{max}^2 = \frac{1}{2} kA^2$,
tehát akár az amplitúdó, akár a maximális sebesség ismeretében adott x kitéréshez v könnyen számolható.

7/1. Vízszintes súrlódásmentes síkon 6 N nagyságú vízszintes erővel húzunk egy 2 kg tömegű testet. Mekkora sebességre gyorsul 4 m-es úton, ha 5 m/s-os kezdősebességgel indul?

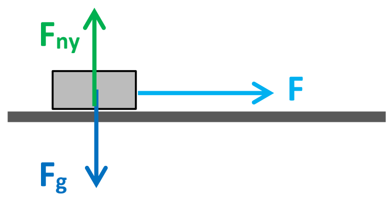
Megoldás
I. megoldás: a mozgásegyenlet integrálásával:
A test gyorsulása $a = F/m = 3$ m/s^2.
A sebesség $v(t) = v_0 + at$; $v_0 = 5$ m/s $\rightarrow$ $v(t) = 5 + 3t$ [m/s].
A megtett út $s(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 5t + 1{,}5t^2$ [m].
I.A) folytatás: kiszámoljuk az időt:
Mennyi ideig tart a mozgás? s = 4 m-t t_1 idő alatt tesz meg: $5t_1 + 1{,}5t_1^2 = 4 \rightarrow t_1 = 2/3$ s.
Mennyi lesz a végsebesség? $v_1 = 5 + 3\cdot(2/3) = 7$ m/s.
I.B) folytatás: kiküszöböljük az időt:
Mivel a sebességre a hely függvényében van szükségünk, a v(t) és s(t) függvényekből előállítjuk az s(v) ill. v(s) összefüggést:

$$v = v_0 + at \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \rightarrow s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{2v_0v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0v + v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{2as + v_0^2}.$$

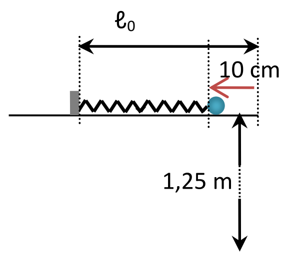
Behelyettesítve
$$v_1 = \sqrt{2\cdot3\cdot4+5^2} = 7 \text{ m/s}.$$

II. megoldás: munkatétellel:



$W_{össz} = \Delta E_{kin}$
$W_{össz}$:
A testre hat a gravitációs erő, a felület által kifejtett nyomóerő, és az az erő, amivel húzzuk a testet, tehát
$W_{össz} = W_g + W_{ny} + W_F$.
A gravitációs erő és a felület által kifejtett nyomóerő merőleges az elmozdulás irányára (φ=90° $\rightarrow$ $\cos\varphi$=0), így általuk végzett munka zérus, $W_g = W_{ny} = 0$.
Az általunk kifejtett húzóerő az elmozdulás irányába mutat (φ=0 $\rightarrow$ $\cos\varphi$=1), így a kifejtett munka $W_F = F\,s$, tehát
$W_{össz} = F\,s$.
$\Delta E_{kin} = E_{kin,\,vég} - E_{kin,\,kezdő} = \frac{1}{2} mv_{vég}^2 - \frac{1}{2} mv_{kezdő}^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$.
Tehát

$F \cdot s = ½\, mv_1^2 – ½\, mv_0^2$,
amiből
$v_1 = \sqrt{2(F/m) \cdot s + v_0^2}$.
Behelyettesítve $v_0 = 5$ m/s, $F = 6$ N, $m = 2$ kg, $s = 4$ m értékét
$v_1 = \sqrt{2 \cdot (6/2) \cdot 4 + 5^2} = 7$ m/s.



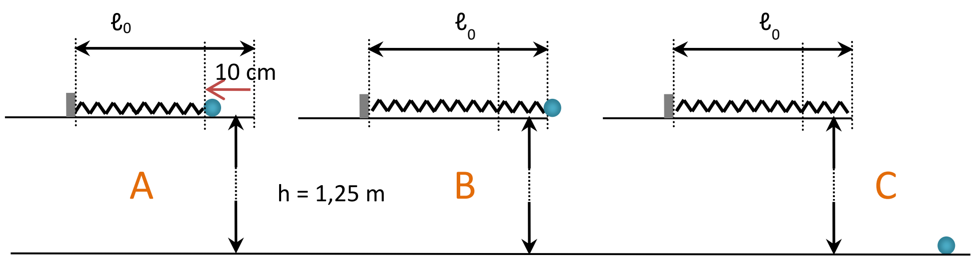
7/2. Asztallaphoz rögzített rugó nyugalmi állapotban éppen az asztal széléig ér.
10 cm-rel összenyomjuk, majd cérnával összekötjük (megfeszített állapotban).
A rugó ilyen megfeszítéséhez 2,5 N erő szükséges.
A végéhez egy 10 g-os testet teszünk, majd elégetjük a cérnát.
Az asztal 1,25 m magas.
Mekkora sebességgel, és a vízszinteshez viszonyítva milyen szögben csapódik a padlóra a test?
A súrlódást hanyagoljuk el!

Megoldás
A rugóállandó, ha 10 cm-rel való összenyomáshoz F = 2,5 N erő kell:
$k = F / \Delta\ell = 2{,}5\ \text{N} / 0{,}1\ \text{m} = 25$ N/m.

A súrlódás és a közegellenállás elhanyagolható, ezért energia-megmaradással megoldhatjuk a feladatot. Kétféle potenciális energiát is fel kell írnunk: egyrészt a test függőleges koordinátájának változása miatt a nehézségi erőhöz tartozó potenciális energiát, másrészt a rugó hosszának változása miatt a rugóerőhöz tartozó potenciális energiát:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot,\,test} + E_{pot,\,rugó} = ½mv^2 + mgz + ½kx^2 = \text{konst.}$$

Mivel a mozgási energiában a sebesség nagysága van benne, így ha a kezdőállapottól a végállapotig egy lépésben írjuk fel az energia-megmaradást, akkor a test sebességének csak a nagyságát kapjuk meg. Kérdés azonban a becsapódás szöge is, amihez a sebesség komponenseit kell ismerni. Ezért most két lépésben számolunk.
Az első lépésben (A → B) a vízszintes helyzetű rugó a testnek vízszintes sebességet ad.
A második lépés (B → C) egy vízszintes hajítás, amikor – mint tudjuk – a sebesség vízszintes komponense állandó, a (függőleges) nehézségi erő hatására pedig nő a sebesség függőleges komponense.



$A \rightarrow B$ lépés:

$E_{kin,\,A} + E_{pot,\,test,\,A} + E_{pot,\,rugó,\,A} = E_{kin,\,B} + E_{pot,\,test,\,B} + E_{pot,\,rugó,\,B}$

A test függőleges koordinátája nem változik,

$E_{pot,\,test,\,A} = E_{pot,\,test,\,B} = mgz = mgh =$ konst., ez kiesik az egyenletből, marad

$E_{kin,\,A} + E_{pot,\,rugó,\,A} = E_{kin,\,B} + E_{pot,\,rugó,\,B}$.

A állapot:

az asztalon a rugó össze van nyomva, a benne tárolt energia

$E_{pot,\,rugó,\,A} = ½kx_A^2 = ½k(\Delta\ell)^2 = ½\cdot 25\cdot 0{,}1^2 = 0{,}125$ J,

(a rugó 10 cm-rel való összenyomásához mi $W = \int_0^{0,1} kx\,dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{0,1} = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 0{,}1^2 = 0{,}125$ J munkát végeztünk, a cérna elégetése után ekkora munkát tud végezni a rugó a testen)

és a test nyugalomban van, $v_A = 0 \rightarrow$

$E_{kin,\,A} = ½mv_A^2 = 0$;

B állapot:

a rugó elérte a nyugalmi hosszát, $x_B = 0 \rightarrow$

$E_{pot,\,rugó,\,B} = 0$,

és a test felgyorsult v_B sebességre, ami vízszintes, ez lesz a vízszintes sebességkomponens földet éréskor is, jelöljük ezért v_x-szel: $v_B = v_x \rightarrow$

$E_{kin,\,B} = ½mv_x^2$.

Írjuk fel a mechanikai energia megmaradását:

$½k(\Delta\ell)^2 + 0 = 0 + ½mv_x^2$,

amiből a test (vízszintes) sebessége

$$v_x = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta l = \sqrt{\frac{25\text{ N}}{0{,}01\text{ kg}}}\cdot 0{,}1\text{ m} = 5\text{ m/s} .$$

$B \rightarrow C$ lépés:

$E_{kin,\,B} + E_{pot,\,test,\,B} + E_{pot,\,rugó,\,B} = E_{kin,\,C} + E_{pot,\,test,\,C} + E_{pot,\,rugó,\,C}$

A második lépésben a rugó már nem vesz részt (lehet, hogy a rugó önmagában végez rezgőmozgást, de a testtel már nem érintkezik, ezért nem tud rajta munkát végezni).

$E_{pot,\,rugó,\,B} = E_{pot,\,rugó,\,C} = 0$, marad

$E_{kin,\,B} + E_{pot,\,test,\,B} = E_{kin,\,C} + E_{pot,\,test,\,C}$.

B állapot:

a test $z = h = 1{,}25$ m magasan van,

$E_{pot,\,test,\,B} = mgh = 0{,}01\cdot 10\cdot 1{,}25 = 0{,}125$ J,

és a sebessége vízszintes, $v_x = 5$ m/s $\rightarrow$

$E_{kin,\,B} = ½mv_x^2 = 0{,}5\cdot 0{,}01\cdot 5^2 = 0{,}125$ J;

C állapot:

a test $z = 0$ m magasan van $\rightarrow$

$E_{pot,\,test,\,C} = 0$,

és a sebességének vízszintes komponense most is $v_x = 5$ m/s, de a nehézségi erő miatt van v_z függőleges komponense is, a sebességének a nagysága $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \rightarrow$

$E_{kin,\,C} = ½mv^2 = ½m(v_x^2 + v_z^2)$.

Tehát

$½mv_x^2 + mgh = ½mv^2 + 0$,

illetve beírva, hogy $v^2 = v_x^2 + v_z^2$:

$½mv_x^2 + mgh = ½m(v_x^2 + v_z^2) + 0$.

Egyszerűsíthetünk $½mv_x^2$ -tel, és marad

$0 + mgh = ½mv_z^2 + 0$,

amiből látszik, hogy ebben a lépésben függőleges sebességet nyer a test, aminek nagysága

$|v_z| = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1{,}25} = 5$ m/s .

A függőleges sebességkomponens negatív, mert lefelé esik a test, tehát $v_z = -5$ m/s.

A test sebességvektora becsapódáskor

$\mathbf{v} = 5\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{k}$ [m/s],

a sebességének nagysága

$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 7{,}071$ m/s,

és a sebességének a vízszintessel bezárt szöge

arc tg (v_z/v_x) = arc tg $(-5/5)$ = arc tg$(-1) = -45°$.

Ha a kiindulástól a végállapotig egyben írjuk fel az energia-megmaradást:

$$E_{kin,\,A} + E_{pot,\,test,\,A} + E_{pot,\,rugó,\,A} = E_{kin,\,C} + E_{pot,\,test,\,C} + E_{pot,\,rugó,\,C}$$

$$0 \quad + \quad mgh \quad + \quad ½k(\Delta\ell)^2 \;=\; ½mv^2 + \quad 0 \quad + \quad 0$$

$\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta l)^2 + 2gh} = 5\sqrt{2}$ m/s, megkapjuk a sebesség nagyságát.

7/3. Egy ℓ_0 = 30 cm hosszú, k = 20 N/m rugóállandójú rugó végére 35 dkg tömegű testet rögzítünk. A rugót függőlegesen lógatjuk fel és úgy engedjük el a testet, hogy az a rugó felfüggesztési pontjától 38 cm-re van.

Töltsük ki az alábbi táblázatot! A nehézségi erő potenciális energiája abban a magasságban legyen zérus, ami a rezgés egyensúlyi helyzete.

	a test mozgási energiája	a test potenciális energiája	a rugó potenciális energiája	a rugó+test rendszer mechanikai energiája
a rezgés legfelső pontja				
a rezgés egyensúlyi helyzete				
a rezgés legalsó pontja				

Megoldás

A mechanikai energia 3 tagból áll: a test mozgási energiájából, a test függőleges koordinátájától függő (a nehézségi erőhöz tartozó) potenciális energiából és a rugó megnyúlásától függő (a rugóerőhöz tartozó) potenciális energiából:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot,\,test} + E_{pot,\,rugó} = ½\,mv^2 + mgz + ½\,kx^2 = \text{konst.}$$

A mechanikai energia megmaradásának teljesülnie kell, az utolsó oszlopban állandó értéket kell kapnunk.

A test mozgási energiájának számításához a test sebességére van szükségünk.

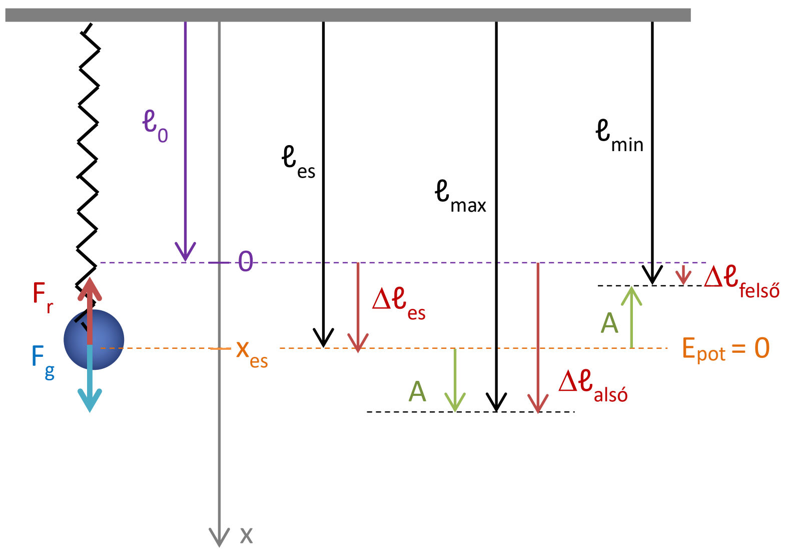
Tudjuk, hogy a rezgés alsó és a felső pontjában a test sebessége zérus, tehát ott $E_{kin} = 0$.

Az egyensúlyi helyzetben a test sebessége maximális, $E_{kin} = ½mv_{max}^2$. Ehhez vagy ismernünk kell a v_{max} sebességet, vagy átalakíthatjuk a képletet úgy, hogy a mozgási energiát az amplitúdóból tudjuk kiszámolni. Mivel $v_{max} = A\omega = A\cdot\sqrt{k/m}$ →

$E_{kin} = ½mv_{max}^2 = ½m(A\cdot\sqrt{k/m})^2 = ½kA^2$.

k (és m) ismert, az A amplitúdót először ki kell számolni.

A test potenciális energiája a feladat szövege szerint az egyensúlyi helyzetben zérus. Ahhoz, hogy ki tudjuk számolni az alsó ill. felső pontban, azt kell tudnunk, hogy mennyivel van a test lejjebb ill. feljebb azokban a pontokban, tehát itt is az A amplitúdóra lesz szükségünk.



A rugó potenciális energiájának számolásához a rugó megnyúlására lesz szükségünk mindhárom pontban. A rezgőmozgás

egyensúlyi helyzetében $\Delta\ell_{es} = x_{es} = mg/k$,

a legalsó pontban $\Delta\ell_{alsó} = \ell_{max} – \ell_0 = x_{es} + A$,

a legfelső pontban $\Delta\ell_{felső} = \ell_{min} – \ell_0 = x_{es} – A$.

A rugó megnyúlása az egyensúlyi helyzetben:

$x_{es} = mg/k = 0{,}35\cdot10/20 = 0{,}175$ m,

itt van a rezgés egyensúlyi helyzete.

Ekkor a test a rugó felfüggesztési pontjától $\ell_{es} = \ell_0 + x_{es} = 0{,}30+0{,}175 = 0{,}475$ m-re van.

Erre a pontra szimmetrikusan végez a test rezgőmozgást A amplitúdóval.

A rezgést úgy indítottuk el, hogy a test a rugó felfüggesztési pontjától 38 cm-re volt, ami jelen esetben a rezgőmozgás legfelső pontja (mivel kezdősebesség nélkül engedtük el a testet), ez a rugó legrövidebb állapota, vagyis

$\ell_{min} = 38$ cm $= 0{,}38$ m,

tehát az amplitúdó

$A = \ell_{es} – \ell_{min} = 0{,}475 – 0{,}38 = 0{,}095$ m.

A rezgőmozgás legalsó pontja, azaz a rugó leghosszabb állapota

$\ell_{max} = \ell_{es} + A = 0{,}475 + 0{,}095 = 0{,}57$ m.

Ezek után ki tudjuk számolni

» a test mozgási energiáját az egyensúlyi helyzetben:

$v_{max} = A\omega = A\cdot\sqrt{k/m} = 0{,}095\cdot\sqrt{20/0{,}35} = 0{,}7181$ m/s,

$E_{kin,\ max} = ½mv_{max}^2 = ½\cdot 0{,}35\cdot 0{,}7181^2 = 0{,}09025$ J; vagy

$E_{kin,\ max} = ½kA^2 = ½\cdot 20\cdot 0{,}095^2 = 0{,}09025$ J;

» a test potenciális energiáját a legfelső és a legalsó pontban: $E_{pot,\ test} = mgh$

a legfelső pontban $h = A$, $E_{pot,test,\ fent} = +mg\cdot A = 0{,}35\cdot 10\cdot 0{,}095 = 0{,}3325$ J,

a legalsó pontban $h = –A$, $E_{pot,test,\ lent} = –mg\cdot A = –0{,}3325$ J;

» a rugó potenciális energiáját: $E_{pot,\ rugó} = ½kx^2 = ½k\ \Delta\ell^2$, $\Delta\ell = \ell – \ell_0$

az egyensúlyi helyzetben $\Delta\ell_{es} = x_{es} = 0{,}175$ m, $E_{pot,\ rugó,\ es} = ½\cdot 20\cdot 0{,}175^2 = 0{,}30625$ J;

a legfelső pontban $\Delta\ell_{min} = \ell_{min} – \ell_0 = 0{,}38 – 0{,}30 = 0{,}08$ m, $E_{pot,\ rugó,\ fent} = ½\cdot 20\cdot 0{,}08^2 = 0{,}064$ J;

a legalsó pontban $\Delta\ell_{max} = \ell_{max} – \ell_0 = 0{,}57 – 0{,}30 = 0{,}27$ m, $E_{pot,\ rugó,\ lent} = ½\cdot 20\cdot 0{,}27^2 = 0{,}729$ J.

Töltsük ki a táblázatot, és számoljuk ki soronként az energiák összegét:

	a test mozgási energiája	a test potenciális energiája	a rugó potenciális energiája	a rugó + test rendszer mechanikai energiája
	$E_{kin} = ½mv^2$	$E_{pot,\ test} = mgh$	$E_{pot,\ rugó} = ½kx^2$	$E_{mech} =$ $= E_{kin} + E_{pot,\ test} + E_{pot,\ rugó}$
a rezgés legfelső pontja	0	0,3325 J	0,064 J	0,3965 J
a rezgés egyensúlyi helyzete	0,09025 J	0	0,30625 J	0,3965 J
a rezgés legalsó pontja	0	–0,3325 J	0,729 J	0,3965 J

A rugó + test rendszer mechanikai energiája állandó.

7/4.

a) Milyen magasra emelkedik a Hold felszínéről v_0 sebességgel függőlegesen kilőtt test?

b) Mennyi legyen v_0, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét?

A Hold sugara $R_{Hold} = 1888$ km, a Hold felszínén a gravitációs gyorsulás $g_{Hold} = 1{,}6\ m/s^2$.

Megoldás

A feladat **b)** részében a test oda kell eljusson, ahol a gravitációs erő zérus, ebből egyértelmű, hogy az általános gravitációs erővel ($F_g = \gamma\frac{mM}{r^2}$) kell számolnunk. Az **a)** részben előfordulhat, hogy a test csak olyan magasságba jut fel, ahol még alkalmazható az a közelítés, hogy a felszín közelében állandónak vehetjük a gravitációs erőt ($F_g = mg$), de oldjuk meg ezt a kérdést is az általános gravitációs erőt használva, ami pontos eredményt ad tetszőleges magasságra.

Az általános gravitációs erő konzervatív, a hozzá tartozó potenciális energia

$$E_{pot} = -\gamma\frac{m \cdot M_{Hold}}{r},$$ ahol r a test távolsága jelen esetben a Holdnak a középpontjától.

A feladatot energia-megmaradást felírva oldhatjuk meg (a Holdnak nincs légköre):

$$E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} = -\gamma\frac{m \cdot M_{Hold}}{r} + ½\, mv^2 = \text{konst.}$$

a) A két állapot, amit összehasonlítunk:

- a test v_0 sebességgel indul a Hold felszínéről, ahol $r = R_{Hold}$, és
- addig emelkedik, amíg $v = 0$ lesz, ott $r = R_{Hold} + h$ (h a Hold felszíne fölötti magasság).

Ezeket beírva

$$-\gamma\frac{m \cdot M_{Hold}}{R_{Hold}} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma\frac{m \cdot M_{Hold}}{R_{Hold}+h} + 0\,.$$

Ebből kifejezhetjük azt a magasságot, ahol a test elveszíti a sebességét:

$$h = \frac{1}{\frac{1}{R_{Hold}} - \frac{v_0^2}{2\gamma M_{Hold}}} - R_{Hold}.$$

A feladatban nincs megadva a Hold tömege, viszont meg van adva g_{Hold} értéke, amit fel tudunk használni. Tudjuk, hogy g-t úgy vezettük be, hogy

$$g_{Hold} = \gamma\frac{M_{Hold}}{R_{Hold}^2},$$

ebből

$$\gamma M_{Hold} = g_{Hold} R_{Hold}^2.$$

A Hold adatai: $R_{Hold} = 1888$ km $= 1{,}888 \cdot 10^6$ m, $g_{Hold} = 1{,}6$ m/s^2, tehát

$$\gamma M_{Hold} = g_{Hold} R_{Hold}^2 = 1{,}6 \cdot (1{,}888 \cdot 10^6)^2 = 5{,}703 \cdot 10^{12}\ \text{m}^3\text{s}^{-2}.$$

Most már be tudunk helyettesíteni a magasság képletébe, hogy megkapjuk a maximális magasságot a v_0 m/s-ban kifejezett kezdősebesség függvényében:

$$h = \frac{1}{\frac{1}{1{,}888 \cdot 10^6} - \frac{v_0^2}{1{,}141 \cdot 10^{13}}} - 1{,}888 \cdot 10^6\ [\text{m}].$$

b) Hol hagyja el a test a Hold vonzókörét? Mivel a Hold által a testre kifejtett erő nagysága

$$F_{g,\,Hold} = -\gamma\frac{m \cdot M_{Hold}}{r^2}$$

fordítottan arányos a távolsággal (pontosabban a négyzetével), így csak végtelen távolságban csökken zérusra, ezért ahhoz, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét, az kell, hogy „végtelen távolra” jusson ($r \to \infty$); az ehhez szükséges kezdősebesség az ún. szökési sebesség (más néven második kozmikus sebesség) $v_{2kozm,Hold}$.

Ezt a sebességet is energia-megmaradásból számolhatjuk.

A két állapot, amit összehasonlítunk:

- a test v_0 sebességgel indul a Hold felszínéről, ahol $r = R_{Hold}$, és
- eljut „végtelen távolra” ($r \to \infty$), ahol az $E_{pot} = -\gamma\frac{m \cdot M_{Hold}}{r}$ potenciális energia értéke zérus. Mivel a minimális szökési sebességet akarjuk kiszámolni, ehhez elég, ha a végtelen távolba zérus sebességgel „érkezik meg” a test, azaz $E_{kin} = 0$.

Felírva az energia-megmaradást:

$$-\gamma\frac{m \cdot M_{Hold}}{R_{Hold}} + \frac{1}{2}mv_{2kozm,\,Hold}^2 = 0 + 0\,,$$

amiből

$$v_{2kozm,\,Hold} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{Hold}}{R_{Hold}}} = \sqrt{2\, g_{Hold} R_{Hold}} = \sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}888 \cdot 10^6} = 2{,}458\ \text{km/s}\,.$$

Gyakorló feladatok zh-ra

7/5. 10 m magas, 45° hajlásszögű lejtő tetejéről 2 kg tömegű test csúszik le. A lejtőn való mozgás közben a súrlódás elhanyagolható. A lejtő kis görbülettel vízszintes, érdes síkba megy át, amelyen a test súrlódási tényezője $\mu = 0{,}2$.
A lejtő lábától milyen messzire jut el a test?

Megoldás
I. megoldás: Kiszámoljuk a test gyorsulását a lejtőn, ill. a vízszintes súrlódásos felületen:
A lejtőn $a_L = g\cdot\sin\alpha$.
A súrlódásos vízszintes síkon $a_S = -\mu g$.
I.A) megoldás: A $v(t) = v_0+at$ ill. $s(t) = v_0t+½at^2$ képletekből kiszámoljuk a lejtő aljára való megérkezés idejét és sebességét, majd a vízszintes síkon a megállás idejét és távolságát:
A lejtőn $a_L = g\cdot\sin\alpha$ és $v_{0L} = 0$ $\rightarrow$ $v_L = (g\cdot\sin\alpha)\cdot t$ $\rightarrow$ $s_L = ½(g\cdot\sin\alpha)\cdot t^2$,
a lejtő hossza $s = h/\sin\alpha$, tehát a lejtő alján $h/\sin\alpha = ½(g\cdot\sin\alpha)\cdot t_L^2$ $\rightarrow$ $t_L = \sqrt{2h/g}\,/\sin\alpha$
$\rightarrow$ $v_L = \sqrt{2hg}$ a test sebessége a lejtő alján, ill. a vízszintes sík kezdetén.
A súrlódásos vízszintes síkon $a_S = -\mu g$ és $v_{0S} = v_L = \sqrt{2hg}$ $\rightarrow$ $v_S = \sqrt{2hg} - \mu g\cdot t$;
a megállásig eltelt idő $\sqrt{2hg} - \mu g\cdot t^* = 0$ $\rightarrow$ $t^* = \sqrt{2hg}\,/\,\mu$,
ezzel a megállásig megtett út $s = \sqrt{2hg}\cdot t^* - ½\mu g\cdot t^{*2} = 2h/\mu - h/\mu = h/\mu = 10/0{,}2 = 50$ m.
I.B) megoldás: Alkalmazhatjuk a 7/1. feladatban levezetett $v = \sqrt{2as+v_0^2}$ és $s = (v^2 - v_0^2)/2a$ összefüggéseket:

$$v_L=\sqrt{2a_Ls+v_0^2} = \sqrt{2\cdot g\sin\alpha\cdot\frac{h}{\sin\alpha}+0} = \sqrt{2gh}\,,\quad \text{és}\quad s = \frac{0-v_L^2}{2a_S} = \frac{-v_L^2}{-2\mu g} = \frac{2gh}{2\mu g} = \frac{h}{\mu} = 50 \text{ m.}$$

II. megoldás: Munkatétellel, energia-megmaradással:
A lejtőn a súrlódás elhanyagolható, így számolhatunk energia-megmaradással:
$E_{pot} + E_{kin} = mgz + ½mv^2 = \text{konst.}$
a lejtő aljának magasságát választva a helyzeti energia zérus szintjének
induláskor $z = h$ és $v = 0$;
leérkezéskor $z = 0$ és $v = v_L$, tehát
$mgh + 0 = 0 + ½\, mv_L^2$
$\rightarrow$ $v_L^2 = 2gh$.
[Természetesen munkatétellel is számolhatunk:
$\Delta E_{kin} = W_{össz}$:
$\Delta E_{kin} = ½\, mv_L^2 - 0$
$W_{össz} = W_g + W_{ny} = F_{g,párh}\cdot s + 0 = (mg\cdot\sin\alpha)\cdot(h/\sin\alpha) = mgh$, vagyis
$½\, mv_L^2 - 0 = mgh$ $\rightarrow$ $v_L^2 = 2gh$.]
A vízszintes síkon való csúszásnál energia-megmaradás nincs, de a munkatételt használhatjuk:
$\Delta E_{kin} = W_{össz}$:
$\Delta E_{kin} = 0 - ½\, mv_L^2$
$W_{össz} = W_s = F_s\cdot s\cdot\cos 180° = -\mu mg\cdot s$, tehát
$0 - ½\, mv_L^2 = -\mu mg\cdot s$
$\rightarrow$ $s = v_L^2/(2\mu g)$.
$v_L^2 = 2gh$ behelyettesítésével
$s = (2gh)/\,/(2\mu g) = h/\mu = 50$ m.

7/6. A főútra becsatlakozó mellékúton a STOP táblánál várakozó autóba hátulról beleütközik egy másik autó. A két autó tömege megegyezik. Az ütközésnél a két autó összetapad (rugalmatlanul ütközik) és a két autóból álló roncs súrlódva továbbcsúszik: átcsúszik a 8 m széles főúton, majd onnan tovább a füvön. Végül az ütközés helyétől 18 m-re áll meg. A hátulról jövő kocsi 11,4 m-es féknyomot hagyott az ütközés előtt. Mekkora sebességgel haladt, mielőtt fékezni kezdett? A súrlódási együttható az aszfalton 0,4, a füvön 0,5.

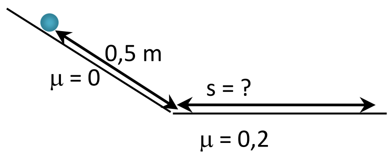
Megoldás

[A] a hátsó kocsi v_0 kezdősebességről indul, s_1 = 11,4 m-es úton fékezi a súrlódási erő aszfalton, ezután a sebessége v_1 lesz;
[B] a v_1 sebességű autó tökéletesen rugalmatlanul ütközik az álló kocsival, az ütközés utáni közös sebességük v_2;
[C] a v_2 kezdősebességű két kocsiból álló roncs az aszfalton s_2 = 8 m-t fékeződik, ami után a sebessége v_3;
[D] a v_3 kezdősebességű két kocsiból álló roncs a füvön s_3 = 10 m-t fékeződik, ami után megáll, $v_4 = 0$.

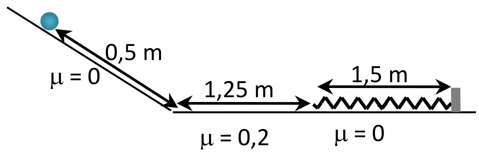
A feladatot munkatétellel oldjuk meg: $\Delta E_{kin} = W_{össz}$.
A kocsikon a súrlódási erő végez munkát (a nehézségi erő és a talaj által kifejtett nyomóerő merőleges a mozgás irányára, ezért az általuk végzett munka zérus). A súrlódási erő nagysága
$F_s = \mu F_{ny} = \mu mg \quad \rightarrow \quad W_s = -\mu mg \cdot s = W_{össz}$.

A végső állapottól számolunk visszafelé a kiinduló sebességig:
[D] $½(m+m)v_4^2 - ½(m+m)v_3^2 = -\mu_{fű}(m+m)g \cdot s_3$
$\rightarrow v_3^2 = 0 + 2\mu_{fű}\, g\, s_3 = \ = 100 \quad \rightarrow \quad v_3 = 10$ m/s.
[C] $½(m+m)v_3^2 - ½(m+m)v_2^2 = -\mu_{aszfalt}(m+m)g \cdot s_2$
$\rightarrow v_2^2 = v_3^2 + 2\, g\, \mu_{aszfalt}\, s_2 = 100 + = 164 \quad \rightarrow \quad v_2 = 12{,}81$ m/s.
[B] Az ütközésre az impulzus-megmaradást felírva:
$mv_1 = (m+m)v_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = 2v_2 = 2 \cdot 12{,}81 = 25{,}61$ m/s.
[A] $½mv_1^2 - ½mv_0^2 = -\mu_{aszfalt}\, mg \cdot s_1$
$\rightarrow v_0^2 = v_1^2 + 2\mu_{aszfalt}\, g \cdot s_1 = 656 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 10 \cdot 11{,}4 = 747{,}2 \quad \rightarrow \quad v_0 = 27{,}33$ m/s = 98,41 km/h.

7/7. Egy 30° hajlásszögű egyenes lejtőn van egy m = 0,5 kg tömegű test a lejtő aljától 0,5 m távolságra (a lejtőn mérve a távolságot). A testnek v_0 = 2 m/s kezdősebességet adunk lefelé. A lejtő (egy sima kis ívvel) vízszintes síkban folytatódik.



A lejtőn a súrlódás elhanyagolható, a vízszintes terepen a súrlódási együttható μ = 0,2.
a) Hol áll meg a test, ha a testet csak a súrlódás fékezi?
b) A vízszintes síkon elhelyezünk egy k = 8 N/m rugóállandójú, ℓ_0 = 1,5 m hosszú rugót a lejtő aljától 1,25 m-re, aminek a túlsó vége rögzítve van. Ahol a rugó elkezdődik, a sík súrlódása már elhanyagolható. Mennyi a rugó maximális összenyomódása, amikor a test nekimegy?



c) Hogyan változnak az eredmények, ha a testet a lejtőn kezdetben nem lefelé, hanem felfelé indítjuk el?

Megoldás

a) A lejtőn – mivel a súrlódás elhanyagolható – érvényes az energia-megmaradás, abból kiszámolhatjuk a test v_1 sebességét a lejtő aljában. A 30°-os lejtőn $h = 0{,}5 \cdot \sin 30° = 0{,}25$ m magasról indul a test. Ha a potenciális energia zéruspontját a lejtő aljába rakjuk, akkor

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + 0$

$\rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 10 \cdot 0{,}25} = 3$ m/s.

A vízszintes síkon munkatételt alkalmazhatunk:

$\Delta E_{kin} = -W_s : \quad 0 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 = -\mu\cancel{m}g \cdot s$

$\rightarrow \quad s = v_1^2/(2\mu g) = 3^2/(2 \cdot 0{,}2 \cdot 10) = 2{,}25$ m.

b) A vízszintes sík kezdetén $v_1 = 3$ m/s most is.

A súrlódás miatt a test a rugóig $s_1 = 1{,}25$ m-en lassul, ezután a sebessége v_2. Ezt a sebességet munkatétellel számolhatjuk ki:

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 = -\mu\cancel{m}g \cdot s_1$

$\rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu g s_1} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 10 \cdot 1{,}25} = 2$ m/s.

A rugó maximális összenyomódását energia-megmaradással számolhatjuk a test + rugó rendszer mechanikai energiájából:

$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot,rugó} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{konst.}$

(az $E_{pot,test} = mgz$ helyzeti energia állandó, felesleges bevenni az egyenletbe)

Kezdetben a rugó nincs összenyomódva és a test sebessége v_2,

a maximális összenyomódáskor a test sebessége zérus:

$\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_{max}^2$

$\rightarrow \quad x_{max} = \sqrt{mv_2^2/k} = \sqrt{0{,}5 \cdot 2^2/8} = 0{,}5$ m.

[vagy munkatétellel a rugó által a testen végzett munkából: $0 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$]

c) Sehogy, mert a test mozgási energiája független attól, hogy a test kezdetben felfelé vagy lefelé indul el, tehát az energia-megmaradás ugyanúgy teljesül. (Ha felfelé indul el, akkor felfelé haladva megáll, majd újra gyorsul lefelé, és amikor az elindulás helyére visszaérkezik, akkor a sebességének nagysága ugyanakkora, mint a kezdősebessége volt.)

7/8. Mennyivel nyúlt meg a rugós erőmérő rugója a nyugalmi hosszhoz képest, ha a mutató a 40 N-os skálaponton áll és a nyújtás közben 1,6 J munkát végeztünk?

Megoldás

Az általunk végzett munka a rugó által végzett munkának az ellentettje, amit pedig ki tudunk fejezni a rugó potenciális energiájával:

$W_{mi} = -W_{rugó} = -(-\Delta E_{pot}) = \Delta E_{pot} = E_{pot,vég} - E_{pot,kezdő} = \frac{1}{2}\, k\, x_{vég}^2 - 0 = \frac{1}{2}\, k\, x_{vég}^2$.

Nem ismerjük a rugóállandót, és most nem is tudjuk kiszámolni a megadott erőből, mert a megnyúlást sem ismerjük. Felírhatjuk viszont, hogy

$F_{vég} = k\, x_{vég}$,

és ezt beírhatjuk a potenciális energiába:

$W_{mi} = \frac{1}{2}\, k\, x_{vég}^2 = \frac{1}{2}\, (k\, x_{vég})\, x_{vég} = \frac{1}{2}\, F_{vég}\, x_{vég}$.

Ebből már kifejezhető a megnyúlás:

$x_{vég} = 2\ W_{mi} / F_{vég} = 2 \cdot 1{,}6/40 = 0{,}08$ m = 8 cm.

Megjegyzés: Ha egyszerűen $W = F\ s$, azaz $W = F\ x$ képlettel számolnánk, akkor hamis eredményt kapnánk. Ez a képlet most azért nem alkalmazható, mert az $F = kx$ erő nem konstans erő. A $W = F\ x$ felírás azt az eredményt adná, mintha az F erő végig akkora lenne, mint a végállapotban, pedig az erő a nyújtás során a megnyúlással egyenesen arányosan nő zérusról a maximális értékre, és emiatt a folyamat során végzett munka éppen a fele annak, mint a végállapotban fellépő konstans erőnek megfelelő munka lenne.

7/9. Asztallaphoz rögzített rugó nyugalmi állapotban éppen az asztal széléig ér. 14 cm-rel összenyomjuk, majd cérnával összekötjük (megfeszített állapotban). A rugó ilyen megfeszítéséhez 4,2 N erő szükséges. A végéhez egy 20 g-os testet teszünk, majd elégetjük a cérnát. Az asztal 1,0 m magas. A súrlódás elhanyagolható. Töltsük ki az alábbi táblázatot:

	a test mozgási energiája	a test+rugó rendszer potenciális energiája	a test+rugó rendszer összes mechanikai energiája
a rugó összenyomott állapotában			
a test asztal szélére való érkezésekor			
a test földre érkezésekor (a becsapódás előtt)			

Megoldás

A rugóállandó $k = F/\Delta\ell = 4{,}2/0{,}14 = 30$ N/m.

A táblázat kitöltéséhez elég kiszámolni

- egyrészt az összenyomott rugó potenciális energiáját, és tudni, hogy ez alakul a test mozgási energiájává az asztal szélére való megérkezésekor (a test sebessége ekkor v_1),
- másrészt a test helyzeti energiáját az asztal magasságán, és tudni, hogy ez alakul mozgási energiává a földre érkezéskor (a test sebessége ekkor v_2).

	a test mozgási energiája	a test+rugó rendszer potenciális energiája	a test+rugó rendszer összes mechanikai energiája
a rugó összenyomott állapotában	0	$\frac{1}{2}kx^2 + mgh =$ $= 0{,}5 \cdot 30 \cdot 0{,}14^2 + 0{,}02 \cdot 10 \cdot 1 =$ $= 0{,}294 + 0{,}2 = 0{,}494$ J	0,494 J
a test asztal szélére való érkezésekor	$\frac{1}{2}mv_1^2 =$ $= \frac{1}{2}kx^2 = 0{,}294$ J	$mgh = 0{,}2$ J	0,494 J
a test földre érkezésekor (a becsapódás előtt)	$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}kx^2 + mgh =$ $= 0{,}294 + 0{,}2 = 0{,}494$ J	0	0,494 J

7/10. Hosszú függőleges csőben rugó van elhelyezve, amelynek a cső falával való súrlódása elhanyagolható. A rugóra 10 g tömegű golyót helyezve 1 cm-rel összenyomódik. Mennyivel nyomódik össze a rugó, ha a golyót a rugó tetejétől számított 1 m magasságból ejtjük rá?

Megoldás

A rugóállandó $k = mg / \Delta\ell_1 = 0{,}01 \cdot 10 / 0{,}01 = 10$ N/m.

A súrlódás elhanyagolható, így energia-megmaradással oldhatjuk meg a feladatot:

$$E_{pot,test} + E_{kin} + E_{pot,rugó} = mgz + ½mv^2 + ½kx^2 = \text{konst.}$$

Legyen a nehézségi erőtér potenciális energiájának zérus szintje abban a magasságban, ahol a rugó teteje van, amikor a rugó nincs összenyomva. Így a rugó potenciális energiájában szereplő megnyúlás és a test potenciális energiájában szereplő z koordináta egyenlő lesz.

Kezdetben a golyó H magasságból indul kezdősebesség nélkül, és a rugó nincs összenyomódva:

$$E_{mech,0} = mgH + ½m \cdot 0^2 + ½k \cdot 0^2 = mgH;$$

a rugó maximális összenyomódásakor a megnyúlása $-\Delta\ell_2$, ekkor a test ennyivel lejjebb van, és egy pillanatra megáll:

$$E_{mech,2} = mg \cdot (-\Delta\ell_2) + ½m \cdot 0^2 + ½k(-\Delta\ell_2)^2 = -mg\Delta\ell_2 + ½k\Delta\ell_2^2,$$

tehát

$$mgH = -mg\Delta\ell_2 + ½k\Delta\ell_2^2.$$

Behelyettesítve

$$0{,}01 \cdot \cancel{10} \cdot 1 = -0{,}01 \cdot \cancel{10} \cdot \Delta\ell_2 + 0{,}5 \cdot \cancel{10} \cdot \Delta\ell_2^2 \text{ ,} \quad \text{azaz} \quad 50\,\Delta\ell_2^2 - \Delta\ell_2 - 1 = 0,$$

aminek megoldása $\Delta\ell_2 = 0{,}1518$ m = 15,18 cm.

7/11. Hogy egy test a Földet elhagyhassa, kb. 11,18 km/s kezdeti sebességre van szüksége. Ha egy bolygóközi szondát 13 km/s sebességgel indítanak el, mekkora lesz a Földhöz viszonyított sebessége, amikor a Földtől már igen távol van?

Megoldás

Energia-megmaradást írhatunk fel:

$$-\gamma \frac{m \cdot M_{Föld}}{r} + \frac{1}{2} m v^2 = \text{konst.}$$

Induláskor $r = R_{Föld}$, és $v_0 = 13 \cdot 10^3$ m/s;

a „Földtől igen távol” ($r \to \infty$) a potenciális energia zérusnak tekinthető, és a test sebessége v_1:

$$-\gamma \frac{m \cdot M_{Föld}}{R_{Föld}} + \frac{1}{2} m {v_0}^2 = 0 + \frac{1}{2} m {v_1}^2 \text{ .}$$

γ és $M_{Föld}$ nincs megadva, de tudjuk, hogy $\gamma \frac{M_{Föld}}{R_{Föld}} = g \cdot R_{Föld}$, ezzel

$$m \cdot g \cdot R_{Föld} + \frac{1}{2} m {v_0}^2 = 0 + \frac{1}{2} m {v_1}^2$$

$$\rightarrow \quad v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2g \cdot R_{Föld}} \text{ .}$$

$g = 9{,}81$ m/s^2 és $R_{Föld} = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m behelyettesítéssel

$$v_1 = \sqrt{13000^2 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 6635 \text{ m/s} = 6{,}635 \text{ km/s.}$$