Lineáris regresszió, azaz
lineáris függvény illesztése a legkisebb négyzetek módszerével:

$y = ax + b$ egyenes esetén

$$S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \quad \rightarrow \quad \text{min.} \qquad (\text{n a pontok száma})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum(ax_i + b - y_i)\cdot x_i = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum(ax_i + b - y_i)\cdot 1 = 0 \qquad (2)$$

(1): $\sum(ax_i + b - y_i)\cdot x_i = \sum(ax_i{}^2 + bx_i - x_iy_i) = \sum(ax_i{}^2) + \sum(bx_i) + \sum(-x_iy_i) =$

$a\sum(x_i{}^2) + b\sum(x_i) - \sum(x_iy_i) = 0$

(2): $\sum(ax_i + b - y_i) = \sum(ax_i) + \sum(b) + \sum(-y_i) = a\sum(x_i) + n\cdot b - \sum(y_i) = 0$

$\rightarrow$ ebből $b = \frac{\sum(y_i) - a\sum(x_i)}{n}$; ezt behelyettesítve (1)-be:

(1): $a\sum(x_i{}^2) + \frac{\sum(y_i) - a\sum(x_i)}{n}\cdot\sum(x_i) - \sum(x_iy_i) = 0$

$a\sum(x_i{}^2) + \frac{\sum(y_i)\cdot\sum(x_i)}{n} - \frac{a\sum(x_i)\cdot\sum(x_i)}{n} - \sum(x_iy_i) = 0$

$a\left(\sum(x_i{}^2) - \frac{\sum(x_i)\cdot\sum(x_i)}{n}\right) = \sum(x_iy_i) - \frac{\sum(y_i)\cdot\sum(x_i)}{n}$

$\rightarrow$ ebből $a = \dfrac{\sum(x_iy_i) - \frac{\sum(y_i)\cdot\sum(x_i)}{n}}{\sum(x_i{}^2) - \frac{\sum(x_i)\cdot\sum(x_i)}{n}}$.

Ezt bővítjük $\frac{1}{n}$-nel: $a = \dfrac{\frac{\sum(x_iy_i)}{n} - \frac{\sum(x_i)}{n}\cdot\frac{\sum(y_i)}{n}}{\frac{\sum(x_i{}^2)}{n} - \frac{\sum(x_i)}{n}\cdot\frac{\sum(x_i)}{n}}$, hogy

bevezethessük az

$$\frac{\sum(x_i)}{n} = \bar{x}\,, \quad \frac{\sum(y_i)}{n} = \bar{y}\,, \quad \frac{\sum(x_iy_i)}{n} = \overline{x\cdot y}\,, \quad \frac{\sum(x_i{}^2)}{n} = \overline{x^2} \quad \text{átlagokat.}$$

A meredekség $a = \dfrac{\overline{x\cdot y} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$,

a tengelymetszet $b = \bar{y} - a\cdot\bar{x} = \bar{y} - \dfrac{\overline{x\cdot y} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\cdot\bar{x}$.

A meredekség és a tengelymetszet szórásának becslése

$y = ax + b$ egyenes esetén

$$s_r{}^2 = \frac{\sum(a \cdot x_i + b - y_i)^2}{n-2},$$

$$\mathrm{Var}[a] = \frac{s_r{}^2}{n \cdot \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)} \quad \rightarrow \quad s_a = \sqrt{\mathrm{Var}[a]},$$

$$\mathrm{Var}[b] = \overline{x^2} \cdot \mathrm{Var}[a] \quad \rightarrow \quad s_b = \sqrt{\mathrm{Var}[b]}.$$

$y = a\,x$ egyenes esetén a képletek eltérőek!

A meredekség

$$a = \frac{\sum(x_i y_i)}{\sum(x_i{}^2)},$$

ill. az átlagokkal felírva

$$a = \frac{\overline{x \cdot y}}{\overline{x^2}}$$ (ennek levezetése a Görbeillesztés jegyzőkönyv egyik feladata)

A meredekség szórásának becslése:

$$s_r{}^2 = \frac{\sum(a \cdot x_i - y_i)^2}{n-1},$$

$$\mathrm{Var}[a] = \frac{s_r{}^2}{n \cdot \overline{x^2}} \quad \rightarrow \quad s_a = \sqrt{\mathrm{Var}[a]}.$$