

4. Gyorsan változó terek

feltételezések: $\vec{j} \neq 0$; $\vec{B} \neq 0$; $\vec{D} \neq 0$

4.1. Eltolási áram: honnan jön a $\dot{\vec{D}}$?

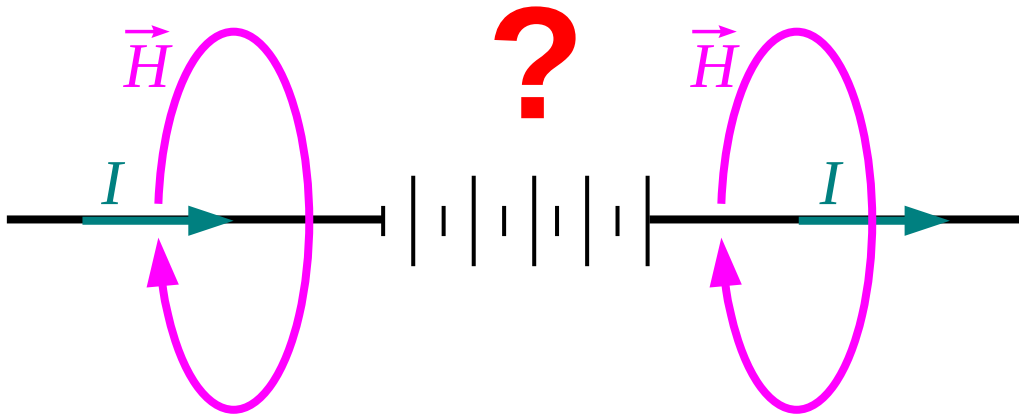
Maxwell-egyenletek

4.2. Alkalmazás: elektromágneses hullámok

4.1. Eltolási áram

Ampère problémája

Telep az áramkörben:



A vezetők körül örvényes mágneses tér van. És a telep körül?

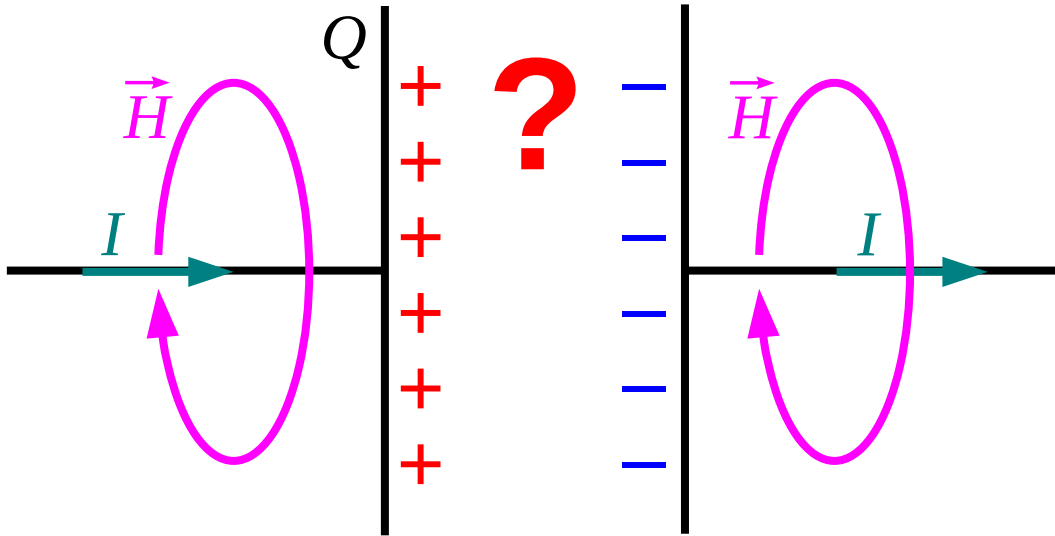
IGEN, ott is van örvényes mágneses tér!

Mert a telepben ionok vezetik az áramot, ott is van áram.

Ampère telepgyűrűvel kísérletileg is ellenőrizte.

Maxwell problémája

Töltődő kondenzátor:



A vezetőkben töltőáram, körülötte örvényes mágneses tér.
Kondenzátorban legyen vákuum => nincs töltéshordozó, áram.
Van-e mágneses tér a kondenzátor körül, belsejében?

IGEN, ott is van!

Maxwell feltevése: pontosan ugyanakkora örvényes mágneses tér van a kondenzátor körül, mint a vezetők körül.

Nehezen mérhető, kísérletileg közvetve bizonyítják.

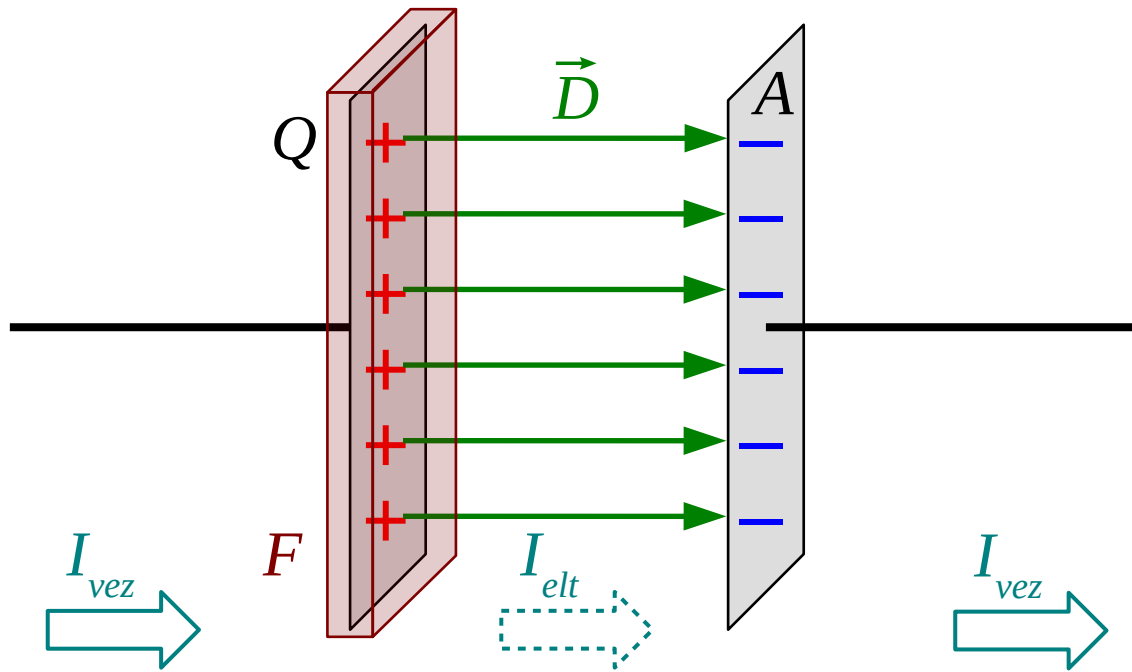
Mi van a kondenzátor fegyverzetei között?

Mi van a kondenzátor fegyverzetei között?



Elektromos tér, töltés közben **változó elektromos tér**.
Ez hozza létre az örvényes mágneses teret.

Eltolási áram



Maxwell feltevése:
ugyanaz a mágneses tér
 $\Rightarrow I_{elt} = I_{vez}$

legyen $Q_{kond}(t=0)=0$, ekkor
 $Q_{drót}(t)=Q_{kond}(t)=Q$

Maxwell I: $Q = \oint_F \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$ (csak F jobb lapján megy át erővonal)

$$I_{elt} = I_{vez} = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_A \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}$$

az **eltolási áram**: $I_{elt} = \int_A \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}$

emlékeztető: $I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$ 

az **eltolási áramsűrűség**: $\vec{j}_{elt} = \dot{\vec{D}}$

V15

Beugró

Eltolási áram 2

emlékeztető: áram = töltéshordozók rendezett mozgása

=> eltolási áram ebben az értelemben nem áram

általánosított áramfogalom: *áram az, ami mágneses teret kelt*

=> ebben az értelemben már áram az eltolási áram

Ha vezetési és eltolási áram is van, együtt gerjesztik a mágneses teret.

Ampère-féle gerjesztési törvény + eltolási áram => IV. Maxwell-egyenlet:

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{vez} + I_{elt} = \int_A (\vec{j} + \dot{\vec{D}}) \cdot d\vec{A}$$

Maxwell-egyenletek

lokális/differenciális alak:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

globális/integrális alak:

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_A \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_G \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \int_A \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}$$

sztatika, Coulomb és elődei, XVII. – XVIII. század

stacionárius terek, Ampère, 1821

kvázistacionárius terek, Faraday, 1832

gyorsan változó terek, Maxwell, 1864

I. Maxwell-egyenlet

A $\mathbf{D}$ -tér (elektromos eltolás) forrása az elektromos töltés.
(A $\mathbf{D}$ -vonalak töltésből indulnak és töltésben végződnek.)



II. Maxwell-egyenlet

Változó mágneses tér örvényes elektromos teret kelt.



III. Maxwell-egyenlet

Nincs mágneses monopólus. =>

A $\mathbf{B}$ térnek (mágneses indukció) nincsen forrása.



IV. Maxwell-egyenlet

Az elektromos áram és az elektromos indukció változása örvényes mágneses teret kelt.



4.2. Elektromágneses hullámok

Maxwell-egyenletek vákuumban ($\rho=0$, $\vec{j}=0$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \vec{D}=0 \\ \text{rot } \vec{E}=-\dot{\vec{B}} \\ \text{div } \vec{B}=0 \\ \text{rot } \vec{H}=\dot{\vec{D}} \end{array} \right\}$$



levezethető

hullámeqyenlet

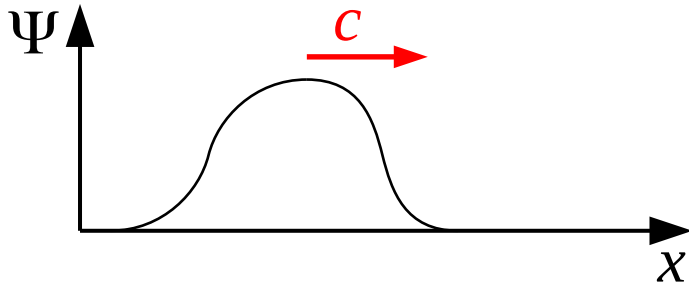
$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}, \text{ és}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{H}, \text{ ahol}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ a Laplace-operátor}$$

Hullámok

Kísérlet: https://fizipedia.bme.hu/index.php/Hullám_terjedése



A kitérés az alakját megtartva halad.
 Ψ az egyensúlyi helyzettől vett kitérés.

Mechanikában levezethető rugalmas közeg kitérésére a **hullámegyenlet**:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}}$$

- a hullám terjedési sebessége c
- ez egy PDE, megoldása $\Psi(x, t)$ függvény
- **haladó hullám**: olyan megoldás, ahol $\Psi(x, t) = \Psi(x - ct)$ (jobbra), vagy $\Psi(x, t) = \Psi(x + ct)$ (balra).

Mitől hullám a hullám?

- nem a hullámgyenlelettől (más PDE-nek is van hullámmegoldása)
- nem attól, hogy Ψ szinuszos
- nem attól, hogy energia terjed vele
- hanem attól, hogy a **térbeli és időbeli változás összefügg:**
 $\Psi_{t_0}(x) = \Psi_{x_0}(t)$ hasonló alakú
- matematikailag: a függvény **argumentuma** x - ct vagy hasonló alakú.

Elektromágneses hullámok

EM és mech. hullámegyenletek összehasonlításából: $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$

$$\Rightarrow c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Ez a fénysebesség, vagyis a fény is elektromágneses hullám.

A hullámegyenlet csak akkor vezethető le, ha ott van a $\vec{D}$ tag.

$\Rightarrow$ Az elektromágneses hullámok léte kísérleti bizonyíték $\vec{D}$ tag létére.

Hertz-kísérlet: két szikraköz egymással szemben,
egyik szikraközben árammal szikrát kelt

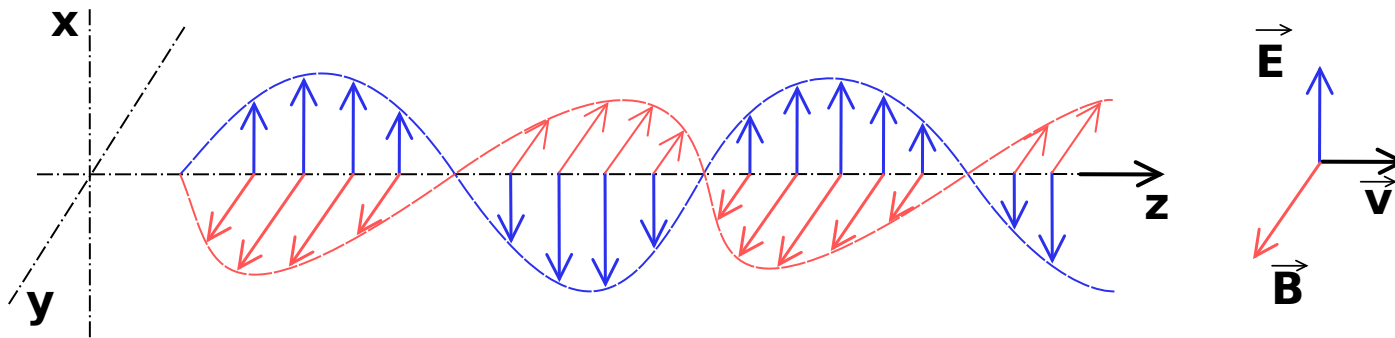
$\Rightarrow$ a másik is szikrázik,

az EM hullám tere megrángatja az ottani elektronokat

Kísérlet: <https://www.youtube.com/watch?v=RREbbMyehZM>

Vákuumban terjedő elektromágneses hullám tulajdonságai

- 1.) Terjedési sebessége vákuumban $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
pontosan 299 792 458 m/s (SI definíció miatt 0 hibával)
- 2.) Transzverzális hullám, azaz $\vec{E} \perp \vec{v}$ és $\vec{H} \perp \vec{v}$
- 3.) $\vec{E} \perp \vec{H}$, és $\vec{E} \times \vec{H}$ a terjedés irányába mutat.



- 4.) A hullám által szállított energia áramsűrűsége: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$,
(ez az ún. **Poynting-vektor**).

Vákuumban terjedő elektromágneses hullám tulajdonságai

5.) Elektromágneses hullámban az elektromos és a mágneses tér energiasűrűsége megegyezik.

6.) Elektromágneses hullámban az elektromos és a mágneses tér nagyságának aránya állandó:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \, \Omega, \text{ ez az ún. hullámimpedancia.}$$

levezetés:

$$\text{vákuumban: } \rho_{en,el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{és} \quad \rho_{en,mágn} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

$$\rho_{en,el} = \rho_{en,mágn} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \, \Omega$$

Vizsga tudnivalók

honlap: http://physics.bme.hu/BMETE14AX04_kov

ha szóbeli (videóchat):

- 11 kis kérdés (11x3 pont)
- 1 nagy kérdés (17 pont)

ha írásbeli:

- 5 beugró (5x2 pont, ebből 6 kell)
- 5 kis kérdés (5x3 pont)
- 1 10 pontos nagy kérdés
- 1 15 pontos nagy kérdés

összesen: 50 pont

ha megvan a kettes, + piros pontokból max. 5 pont

Érdemjegy:

[0; 20) – 1

[20; 27,5) – 2

[27,5; 35) – 3

[35; 42,5) – 4

[42,5; 50] – 5

Köszönöm a figyelmet!