Fizika 2i, tavaszi félév, 7. gyakorlat - MEGOLDÁS

Otthoni gyakorlásra szánt feladatok

H1. Az objektívre érkező fény egy része a levegő-MgF_2 határfelületen, illetve a MgF_2-üveg határfelületen visszaverődik. Ahhoz, hogy a visszaverődő fényben minimális legyen a $\lambda = 540$ nm hullámhosszúságú összetevő, az kell, hogy a két visszaverődő sugár destruktívan interferáljon ezen a hullámhosszon. Mivel mindkét visszaverődés nagyobb törésmutatójú közegről történik, így a π-s fázisugrásokat figyelmen kívül hagyhatjuk, a teljes fáziskülönbség az optikai úthossz különbségéből fakad. Ennek nagysága $\Delta s = 2dn_{MgF_2}$. Így a két sugár fáziskülönbsége $\Delta\varphi = 2\pi\Delta s/\lambda$. Ahhoz, hogy destruktív interferencia lépjen fel, az kell, hogy a fáziskülönbség π páratlan számú többszöröse legyen, azaz:

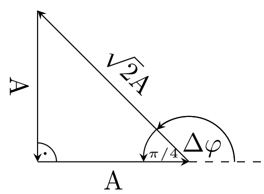
$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad \rightarrow \quad d = \frac{2k+1}{4}\frac{\lambda}{n_{MgF_2}},$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$. A réteg minimális vastagsága ($k = 0$): $d_0 \approx 98$ nm. További lehetséges vastagságok: $d_1 \approx 294$ nm, $d_2 \approx 490$ nm, ... (Itt rendre $k = 1,2,\ldots$)

H2. A hullám amplitúdója arányos a rés szélességével, az intenzitás viszont az amplitúdó négyzetével. Így ha a rés szélessége kétszeresére nő, akkor az amplitúdó is megkétszereződik, míg az intenzitás a négyszeresére növekszik.

H3. A szomszédos résekből kiinduló hullámok fáziskülönbsége (lásd **F5.** feladat megoldása) $\Delta\varphi = 2\pi d\sin\alpha/\lambda$. Mivel a középső rés szélessége $\sqrt{2}$-szöröse a két szélső résének, így az ehhez tartozó fázisvektor hossza is $\sqrt{2}$-szöröse a két másik fázisvektorénak. Ahhoz, hogy teljes kioltást kapjunk, a fázisvektorok összegének null-vektort kell adniuk. Ez akkor lehetséges, ha $\Delta\varphi = 3\pi/4$ (lásd *ábra*). Azaz:

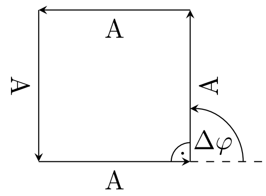
$$2\pi\frac{d\sin\alpha}{\lambda} = \frac{3\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{3\lambda}{8d}.$$



Az első teljes kioltás távolsága a nulladrendű maximumtól: $y_{min} = L\tan\alpha \approx L\sin\alpha = 3\lambda L/(8d)$.

H4. Az előző feladathoz hasonlóan a szomszédos résekből induló hullámok fáziskülönbsége $\Delta\varphi = 2\pi d\sin\alpha/\lambda$. Mivel minden rés egyforma, így minden fázisvektor hossza megegyezik. Ahhoz, hogy teljes kioltást kapjunk, a fázisvektorok összegének nullvektort kell adnia. Ez akkor lehetséges, ha $\Delta\varphi = \pi/2$ (lásd *ábra*). Azaz:

$$2\pi\frac{d\sin\alpha}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\lambda}{4d}.$$



Az első teljes kioltás távolsága a nulladrendű maximumtól: $y_{min} = L\tan\alpha \approx L\sin\alpha = \lambda L/(4d)$.

H5. Legyen a Hold felszínén a keresett távolság x, a távcső átmérője d, a Hold - Föld távolság L. A felbontást a diffrakció limitálja. A Rayleigh-kritériumot alkalmazva kör alakú apertúrára kapjuk, hogy:

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{d},$$

ahol θ a távcsőbe bejutó fény nyílásszöge, λ az átlagos hullámhossz. Továbbá tudjuk, hogy:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{x}{2L} \approx \frac{\theta}{2},$$

ahol az $L \gg x$ feltételezéssel éltünk. A két egyenlet összevonásából és a behelyettesítésből adódik, hogy:

$$x = 1{,}22\frac{\lambda L}{d} = 51{,}5 \text{ m}$$

H6. Legyen a keresett járműtávolság x, az autófényszórók távolsága l, d a pupillánk átmérője, θ a szemünkbe bejutó fény nyílásszöge, λ az átlagos hullámhossz. Az előző feladathoz hasonlóan, felírhatjuk a diffrakcióhoz tartozó Rayleigh-kritériumot:

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{d},$$

valamint a geometriából tudjuk, hogy:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{l}{2x} \approx \frac{\theta}{2},$$

hasonlóan az előző példában alkalmazott közelítéssel. Átrendezve az egyenleteket és behelyettesítve adódik, hogy:

$$x = \frac{ld}{1{,}22\lambda} = 7{,}4 \text{ km}$$

H7. A d rácsállandójú optikai rács m-edik erősítésének iránya λ hullámhosszúságú fény esetén

$$\sin\alpha_m = m\frac{\lambda}{d},$$

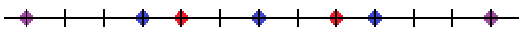
így egy L távolságra eső ernyőn az erősítés helyei

$$\frac{x_m}{L} = m\frac{\lambda}{d},$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sin\alpha_m \approx \alpha_m$ kis szögekre. A szomszédos erősítések közötti távolság tehát

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}.$$

Ez a hullámhosszal arányos. Esetünkben a bíbor színű fénynek két komponense van, ezek így két periodikus mintázatot adnak, amelyek periódusa 450:600 arányban állnak, és átfednek. Bíborszínű foltok ott jönnek létre, ahol a vörös és kék mintázat egybeesik (ábra). A bíborszínű foltok távolságát úgy számolhatjuk mint egy olyan monokróm fény intenzitáshelyeit, mint aminek a hullámhossza a vörös és kék hullámhosszak legkisebb közös többszöröse. Jelen esetben ez λ =1800 nm.

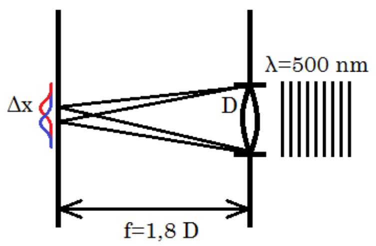


A rácsállandót átrendezéssel kaphatjuk meg:

$$d = \frac{\lambda L}{\Delta x} = 1{,}8\ \mu\text{m} \cdot \frac{2\ \text{m}}{0{,}06\ \text{m}} = 60\ \mu\text{m}.$$

H8. Az egyszerű rés kioltási helyeire ismerjük, hogy

$$\sin\alpha_m = m\frac{\lambda}{D}.$$



Egy lencsére egy kör alakú résként tekinthetünk (ábra). Kör alakú apertúránál a beérkező síhullám képe az ún. Airy-folt, ami tulajdonságaiban nagyon hasonló a $\frac{\sin x}{x}$ függvényhez, de attól kvantitatívan eltér, az első kioltási helyre

$$\sin\alpha = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D},$$

ami a szenzoron

$$\Delta x = 1{,}22 \cdot \frac{f}{D} \cdot \lambda = 1{,}22 \cdot 1{,}8 \cdot \lambda = 1{,}1\ \mu\text{m}$$

távolságot jelent. Bármilyen távoli tárgyról készült képet úgy tudunk elképzelni geometriai optikai analógiával, mintha a kamera nem lenne jól fókuszálva, és tárgy pontjainak képei kis Airy-folt nagyságú körök, így a kép elmosódott lesz. Ez természetesen egy tisztán hullámoptikai effektus. A legnagyobb felbontást Δx méretű pixelekkel lehetséges elérni, mivel tovább növelve a pixelek sűrűségét, nem kapunk élesebb képet.

H9. Ha a beeső fény polarizálatlan, az azt jelenti, hogy minden polarizáltságú fény keveredik benne mindenféle fázisban, mindenféle frekvenciával. Ha arra vagyunk kíváncsiak mekkora intenzitás jut át a polárszűrőn, akkor a frekvencia és a fázis nemszámít, csak a megfelelő komponensek polarizációja, hiszen az intenzitás nem függ sem a frekvenciától, sem a fázistól. A tökéletesen polarizálatlan fény úgy képzelhető el, mintha az I_0 intenzitása egyenletesen oszlana szét minden polarizációs irány között. A polarizációs irány nem más mint az elektromos mező vektorának iránya, azaz egy hullámban az amplitúdó vektor iránya. A polarizálatlan fény tehát ugyanakkora $\mathbf{E_0}$ amplitúdóval tartalmazza az összes polarizációs irányt (polarizátor résével bezárt [0,2π) szögtartomány). Ha ezt a szögtartományt kis $\Delta\phi$ szögtartományokra osztjuk, akkor az egyenletes szétoszlás azt jelenti, hogy minden ilyen tartományban ugyanakkora ΔI intenzitás van, és ezek összege $\sum_{\Delta\phi=0}^{2\pi}\Delta I = I_0$. Ha a [0,2$\pi$] intervallumot $\Delta\phi$ méretű kis intervallumokra osztjuk, akkor hány darab ilyen kis intervallum van? $2\pi/\Delta\phi$. Ezzel $\sum_{\Delta\phi=0}^{2\pi}\Delta I = \frac{2\pi}{\Delta\phi}\Delta I = I_0 \rightarrow \Delta I = I_0\frac{\Delta\phi}{2\pi}$ A gond csak az, hogy a réssel bezárt ϕ szögtől függően a ΔI intenzitásokból nem ugyanannyi fog átjutni a polarizátoron, ez könnyen érezhető hiszen annak a $\Delta\phi$ tartománynak az intenzitása, aminek a polarzációja párhuzamos a polarizátorral ($\phi = 0$), teljes mértékben át fog jutni a polarizátoron, míg annak a tartománynak az intenzitása, amely merőleges a polarizátorra ($\phi = \pi/2$) egyáltalán nem fog átjutni a polarizátoron. Egy tetszőleges ϕ polarizáltságú tartományból vajon az intenzitás mekkora része jut át? Egy lineárisan polarizált síkhullám esetében az intenzitás az elektromos mező amplitúdójának négyzetével arányos, és a polárszűrő annyit csinál, hogy egy ilyen lineárisan polarizált síkhullám esetén az elektromos mező vektorának csak azon részét engedi át, ami párhuzamos a polarizátorral. Azaz az elektromos mező amplitúdójának nagysága az alábbi módon változik a résen való áthaladáskor $E_0 \rightarrow E_0\cos\phi$. Ennek megfelelően a ϕ szöggel jellemzett tartományban lévő intenzitás az alábbi módon változik $\Delta I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \rightarrow \frac{1}{2}\epsilon_0 c (E_0\cos\phi)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2\cos^2\phi = \Delta I\cos^2\phi$. A polárszűrő túloldalán az intenzitás ismét a lineárisan polarizált síkhullámok intenzitásainak összege (de ezúttal már minden síkhullám polarizációja párhuzamos a polárszűrő résével): $I = \sum_{\Delta\phi=0}^{2\pi}\cos^2\phi\Delta I =$ $= \sum_{\Delta\phi=0}^{2\pi}\cos^2\phi\left(I_0\frac{\Delta\phi}{2\pi}\right) = \frac{I_0}{2\pi}\sum_{\Delta\phi=0}^{2\pi}\cos^2\phi\Delta\phi \approx$ $\approx \frac{I_0}{2\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi = \frac{I_0}{2\pi}\frac{1}{2} = \frac{I_0}{4\pi}$.

Cirkuláris polarizáció esetén a polarizációs vektor időben egyenletesen körbeforog. Ilyenkor azt lehetne mondani hogy az intenzitás időfüggő, méghozzá azért mert az átjutó intenzitás $I_0\cos^2\phi = I_0\cos^2(\omega t + \phi_0)$, ahol ϕ_0 a polarizációs irány polarizátorral bezárt szöge t = 0-ban, ω pedig a szögsebesség. Mivel az intenzitás eleve egy időátlagolt mennyiség, és az ilyen hullámoknak nagyon nagy a frekvenciájuk, ésszerű a fenti mennyiség időátlagát vennünk. Ha a periódushoz képest nagyon hosszú ideig átlagolunk, az jó közelítéssel annyi, mintha egész számú periódusra átlagolnánk, a $\cos^2$ egész számú periódusra vett átlaga pedig 1/2. Tehát cirkuláris polarizáció esetén időátlagban az átjutó intenzitás $I_0/2$.

H10. Ez a feladat majdnem ugyanaz mint az órai F7* feladat, annyi a különbség, hogy itt két polarizátort helyezünk be egy helyett. Az első polarizátoron való áthaladás után lineárisan polarizált I_0 intenzitású fényünk van, ez a fény esik a behelyezett polarizátorra, amik közül az első a lineárisan polarizált fényünkkel 30°-ot a második pedig 60°-ot zár be. Az első behelyezett szűrő után az intenzitás már csak $I_0 \cos^2 30°$, és a polarizációs sík megváltozik, az új polarizációs irány párhuzamos az első behelyezett polarizátorral, ezért a második behelyezett polarizátor már nem 60°-ot zár be a polarizációs síkkal, hanem csak $60° - 30° = 30°$-ot. A második behelyezett polarizátoron való áthaladás után az intenzitás ezért ismét $\cos^2 30°$-kal szorzódik, $I = I_0 \cos^4 30°$, és a polarizáció síkja ismét elfordult 30°-al. Az eredeti (első polarizátor utáni) polarizációs síkhoz képest már 60°-ot fordult el a fény polarizációja, és így érkezik el az utolsó polarizátorhoz, ami az eredeti polarizációhoz képest 90°-ot zárt be (két merőleges polarizátorral indult a feladat), ezért a fény polarizációja ezzel az utolsó polairzátorral már csak $90° - 60° = 30°$-ot zár be, tehát az intenzitás ismét beszorzódik $\cos^2 30°$, $I = I_0 \cos^6 30°$.