Fizika 2i, tavaszi félév, 4. gyakorlat - MEGOLDÁS

Otthoni gyakorlásra szánt feladatok

H1. A v sebességgel mozgó q töltésű töltött részecskére B mágneses térben

$$F_{\mathrm{L}} = qvB$$

nagyságú Lorentz-erő hat, mely azt körpályára kényszeríti. Az m tömegű és v sebességű tömegpont r sugarú körmozgásához

$$F_{\mathrm{cp}} = \frac{mv^2}{r}$$

nagyságú, a mozgásra merőleges irányú erő szükséges, melyet jelen esetben a Lorentz-erő szolgáltat. A két erő egyenlőségéből a sugár kifejezhető.

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

A feladat szövegének megfelelően a sebességet a mozgási energia $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ képletéből kifejezhetjük, majd a sugár képletébe beírva a

$$r = \frac{\sqrt{2E_{\mathrm{kin}}m}}{qB}$$

kifejezést kapjuk. Behelyettesítve a megadott értékeket, a sugárra $r = 3{,}0$ cm-t kapunk.

H2. A mágneses térben lévő, áram járta dróthurokra Lorentz-erő hat. A hurok függőleges oldalaira ható erők azonos nagyságúak, de a jobbkéz-szabály alapján ellentétes irányúak, így eredőjük nulla. Az eredő Lorentz-erőt tehát az alsó, vízszintes oldalra ható erő adja. Ennek nagysága $F_L = IBl$, ahol I a dróthurokban folyó áram nagysága, B a mágneses indukcióvektor nagysága, l pedig a dróthurok alsó oldalának hossza. A Lorentz-erő függőlegesen felfelé (lefelé) mutat, ha a hurok alsó oldalán az áram jobbra (balra) folyik. A hurokban folyó áram nagysága a telep feszültségének és a hurok ellenállásának hányadosa: $I = U/R$.
Ahhoz, hogy a mérleg nullát mutasson, az kell, hogy a Lorentz-erő felfelé mutasson és nagysága megegyezzen a telepre és hurokra ható nehézségi erővel. Azaz:

$$mg = F_L = IBl = \frac{U}{R}Bl \quad \rightarrow \quad R = \frac{UlB}{mg} \approx 1{,}08\ \Omega$$

Az áramnak az alsó oldalon jobbra kell folynia, azaz a telep pozitív pólusa a bal oldali.

H3. Az I_1 árammal átjárt vezető által keltett mágneses indukció a vezetőkeret minden pontjában az *ábra* síkjára merőlegesen, befele mutat, így az mindenhol merőleges a vezetőkeretben folyó I_2 áramra. Az I_1 áram által keltett mágneses indukció távolságfüggését a gerjesztési törvénnyel kaphatjuk meg (kihasználva a hengerszimmetriát):

$$2r\pi B(r) = \mu_0 I_1.$$

B mágneses indukciójú térben a térre merőleges helyzetű, l hosszúságú, I árammal átjárt vezetékre $F_L = IBl$ nagyságú Lorentz-erő hat, amelynek az irányát az áramirány és az indukcióvektor jobb-sodrású merőlegességével határozhatjuk meg. A vezetőkeretnek az egyenes vezetőre merőlegesen álló darabjaira ható erők eredője 0 (vízszintes drótok az *ábrán*), mivel az ellentétesen folyó I_2 áramoknak köszönhetően páronként azonos, de ellentétes erők ébrednek bennük. A vezetővel párhuzamos drótdarabokban azonban különböző nagyságúak az erők, így az eredőjük a keretet taszítani fogják az egyenes vezetőtől. Az erő nagyságát pedig a két Lorentz-erő különbsége adja:

$$\sum F = F_L(\downarrow) - F_L(\uparrow) = I_2 a \left(B\left(\frac{a}{2}\right) - B\left(\frac{3a}{2}\right) \right)$$

$$\sum F = \frac{2\mu_0 I_1 I_2}{3\pi} = 8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}.$$

H4. A félkör közepén kialakuló mágneses indukcióvektor nem más, mint a félkör által létrehozott mágneses indukcióvektor ($\mathbf{B}_{FK}$), és a két félvégtelen egyenes vezető ($\mathbf{B}_{E1}, \mathbf{B}_{E2}$) által létrehozott mágneses indukcióvektorok vektoriális összege ($\mathbf{B}_{FK} + \mathbf{B}_{E1} + \mathbf{B}_{E2}$). A legáltalánosabb esetben a Biot-Savart törvény segítségével kéne végigmennünk a vezető minden egyes kis $d\mathbf{l}$ szakaszán, és felösszegezni ezen kis szakaszok járulékát ($d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}$), csakhogy jelen esetben az összes ilyen járulék iránya vagy merőlegesen a hurok síkjából kifelé vagy befelé mutat, így csak a $d\mathbf{B}$ járulékok nagyságait kell felösszegeznünk. További egyszerűsítés lenne, ha meg tudnánk mondani mekkora mágneses indukciót hoz létre egy félvégtelen vezető, és mekkorát egy félkör alakú vezető, a Biot-Savart törvény alkalmazása nélkül. Az órán látott F4* feladatban a hosszú, egyenes vezető mágneses terét az Ampère-féle gerjesztési törvényből vezettük le ($B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$), az elrendezés hengerszimmetriájára alapozva. A félvégtelen egyenes vezetőnek nincs hengerszimmetriája (a henger tengelye menti eltolásra nem szimmetrikus), ezért az Ampère-féle gerjesztési törvényt nem használhatjuk, viszont mivel két félvégtelen vezetőt összeillesztve egy végtelen vezetőt kapunk, így a félvégtelen vezető által létrehozott mágneses indukció nem más, mint a végtelen vezető által létrehozott mágneses indukció fele, $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$, ahol R a félkör sugara. Itt fontos, hogy a két félvégtelen vezető mágneses indukcióvektora ugyanabba az irányba mutat, ezért elég a nagyságokat összegezni . Ez a képlet alkalmazható a felső és az alsó félvégtelen vezetőkre is, tehát $B_{E1} = B_{E2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$, és a jobbkéz szabály alapján mindkettő ugyanabba az irányba mutat, azaz nagyságuk összeadódik. A félkör mágneses indukciójának nagyságát hasonló módon a kör alakú vezető mágneses indukciójának ($B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ lásd F4* feladat) a fele, $B_{FK} = \frac{\mu_0 I}{4R}$.

Az a) elrendezésben a jobbkéz szabály alapján a félkör indukcióvektora is ugyanabba az irányba mutat, mint a félvégtelen egyenes vezetők indukcióvektorai, tehát az eredő mágneses indukció a lap síkjába befelé mutat, és nagysága

$$B = B_{E1} + B_{E2} + B_{FK} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{2}{\pi} + 1\right) \approx 10{,}3\ \mu\mathrm{T}$$

A b) esetben a félkör által létrehozott mágneses indukcióvektor iránya a lap síkjából kifelé mutat, ellentétesen a félvégtelen vezetők indukciójával, ezért az eredő indukció nagysága

$$B = B_{E1} + B_{E2} - B_{FK} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{2}{\pi} - 1\right) \approx -2{,}3\ \mu\mathrm{T},$$

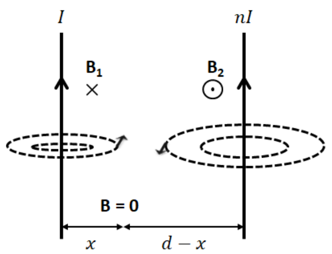
ahol a lap síkjába befelé mutató irányt vettük pozitívnak.

H5. Az előző feladat alapján az eredő mágneses indukcióvektor itt is két félvégtelen egyenes vezető és egy negyedkör által létrehozott mágneses indukcióvektorok összege, amik ezúttal is mind ugyanabba az irányba mutatnak, a lap síkjába befelé, tehát az eredő mágneses indukcióvektor is ebbe az irányba mutat, és nagysága

$$B = B_{E1} + B_{E2} + B_{NK} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \approx 17{,}8\ \mu\mathrm{T},$$

ahol $B_{NK} = B_{FK}/2$ a negyedkör mágneses indukciójának nagysága.

H6. Folyjon az 1. vezetékben I áram, a 2.-ban nI. Jelölje x a keresett távolságot.



A két vezetékre külön-külön alkalmazva a gerjesztési törvényt (és kihasználva a hengerszimmetriát) a mágneses indukciók nagyságára kapjuk, hogy

$$2x\pi B_1 = \mu_0 I,$$

$$2(d-x)\pi B_2 = \mu_0 n I.$$

Az áramirányok azonossága következtében az *ábra* síkjában a két vezeték között az 1. és 2. vezeték által keltett mágneses indukcióvektorok ellentétes irányúak, így

$$B = B_1 - B_2,\ 0 < x < d,$$

azaz a mágneses indukció ott 0, ahol a $B_1 = B_2$ feltétel teljesül. A feltételből adódik, hogy

$$\frac{1}{x} = \frac{n}{d-x},$$

ahonnan az $x = d/(n+1)$ végeredményt kapjuk.

H7. A hengeres vezető keresztmetszetének nagysága $A = (R_1^2 - R_2^2)\pi$. Mivel a vezetőben az áramsűrűség egyenletes, a teljes átfolyó áram nagysága pedig I, így az áramsűrűség a vezetőben

$$j = \frac{I}{A} = \frac{I}{(R_1^2 - R_2^2)\pi}.$$

A mágneses indukcióvektor nagyságát az Ampère-féle gerjesztési törvény segítségével határozhatjuk meg. Ehhez szükségünk van a vezető tengelyétől mért r sugarú körön belül folyó áram nagyságára (jelölje ezt I_r), ami az áramsűrűséggel kifejezhető:

$$I_r = j(r^2 - R_2^2)\pi = \frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} I.$$

A gerjesztési törvény alapján a mágneses indukcióvektor nagysága:

$$2r\pi B = \mu_0 I_r \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{r^2 - R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} I \approx 5{,}55\ \mu\mathrm{T}.$$

H8. Egy körvezető középpontjában a mágneses indukcióvektor iránya a körvezető síkjára merőlegesen befelé vagy kifelé mutat az áram irányától függően (jobbkéz szabály) és nagysága ($B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, lásd F4* feladat). Mivel a két körvezetőben az áramok körüljárási iránya ellentétes, a mágneses indukcióvektoraik iránya is ellentétes, és az eredő mágneses indukcióvektor nagysága

$$B = \left|\frac{\mu_0 I_1}{2r_1} - \frac{\mu_0 I_2}{2r_2}\right| \approx 10{,}5\ \mu\mathrm{T}.$$

b) Ha az áramok körüljárási iránya azonos lenne, akkor a mágneses indukcióvektorok iránya is azonos lenne, és a nagyságuk összeadódna:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2r_2} \approx 73{,}3\ \mu\mathrm{T}.$$

c) Mekkora legyen I_1 ahhoz, hogy az a) feladatban kapott B 0 legyen?

$$B = 0 = \left|\frac{\mu_0 I_1}{2r_1} - \frac{\mu_0 I_2}{2r_2}\right| \quad \rightarrow \quad \frac{\mu_0 I_1}{2r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2r_2}.$$

Innen I_1-re adódik:

$$I_1 = I_2 \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}\ \mathrm{A}.$$

Tehát I_1 értékét az eredeti 1 A 4/3-szorosára kell növelni.

H9. A körvezető középpontjában a mágneses indukcióvektor a körvezető és az egyenes vezető által létrehozott mágneses indukcióvektorok vektoriális összege, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_K + \mathbf{B}_E$. A két vektor iránya különbözik, a körvezető a kör síkjára merőleges irányú mágneses indukciót hoz létre, míg az egyenes vezető mágneses indukcióvektora a kör síkjában van. Mivel ezek a vektorok egymással derékszöget zárnak be, az eredő vektor nagyságát egyszerűen a Pitagorasz-tételből számolhatjuk:

$$B = \sqrt{B_K^2 + B_E^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2r}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}\right)^2} \approx 43{,}0\ \mu\mathrm{T}.$$

b) Mivel $\mathbf{B}_K$ és $\mathbf{B}_E$ egymással derékszöget zárnak be, az eredő mágneses indukcióvektornak a kör síkjával bezárt α szögére az alábbi egyenletet írhatjuk fel

$$\tan\alpha = \frac{B_K}{B_E} = \frac{\pi d I_1}{r I_2}.$$

Ahhoz, hogy ezek $\alpha = 45°$-ot zárjanak be, az kell, hogy $B_K = B_E$ teljesüljön, azaz:

$$I_2 = \frac{\pi d}{r} I_1 \approx 16{,}8\ \mathrm{A}.$$

H10****.** a) A szolenoidon kívüli mágneses tér nagyságát a gerjesztési törvénnyel kaphatjuk meg, amely az elrendezés hengerszimmetriája miatt:

$$2rB = \mu_0 I$$

ahol $I = I_1 + I_2$ a teljes függőlegesen átfolyó áram. Vegyük észre, hogy a tekercs által indukált mágneses tér a tekercsen kívül jó közelítéssel megegyezik egy olyan végtelen egyenes vezető terével, amiben ugyanakkora áram folyik, függetlenül a tekercs sugarától, menetszámától. Behelyettesítve a megadott mennyiségeket $B = 3\ \mu\mathrm{T}$.

b) Ennél a feladatrésznél az egyenes vezető és a szolenoid terét külön érdemes számolni. Az egyenes vezető tere

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = 10\ \mu\mathrm{T}.$$

A szolenoid által indukált mágneses tér a szolenoidon belül jó közelítéssel homogén, a szolenoid tengelyére merőleges. Nagyságát szintén a gerjesztési törvényből kaphatjuk. Egy L hosszúságú szolenoidon a keresztülhaladó zárt görbére a

$$B_1 L = \mu_0 n L I_1$$

egyenlőséget kapjuk, amiből

$$B_1 = \mu_0 n I_1 = 31\ \mu\mathrm{T}.$$

(A menetszám mértékegysége ebben a feladatban menet/méter!)

A két vezető mágneses terének járulékai merőegesek, így az összeg nagyságát Pitagorasz-tétellel számoljuk:

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 33\ \mu\mathrm{T}.$$