Fizika 2i, tavaszi félév, 3. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. A párhuzamos kapcsolás kialakítása után a kezdetben töltetlen kondenzátor töltése

$$Q = 20 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} \cdot 50\ \mathrm{V} = 10^{-3}\ \mathrm{C}$$

lesz. Az ismeretlen kondenzátor kapacitását jelölje C. Mivel a párhuzamos kapcsolásban ezen a kondenzátoron eső feszültség is 50 V, így a töltése $C \cdot 50$ V. A kezdeti töltése $C \cdot 150$ V volt, a töltésmegmaradás miatt:

$$C \cdot 150\ \mathrm{V} = 10^{-3}\ \mathrm{C} + C \cdot 50\ \mathrm{V},$$

ahonnan

$$C = \frac{10^{-3}\ \mathrm{C}}{100\ \mathrm{V}} = 10^{-5}\ \mathrm{F} = 10\ \mu\mathrm{F}.$$

F2*. Legyen $U_0 = 12$ V. *a*) Mivel a kondenzátor kapacitása

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} A}{d} = \frac{Q}{U_0} \ \rightarrow\ Q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} A U_0}{d} \approx 48\ \mathrm{nC}.$$

b) Ha nem lenne a kondenzátorlemezek között dielektrikum, akkor az elektromos térerősség

$$E = \frac{U_0}{d} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A}$$

lenne, ahol $Q_0 = C_0 U_0$ és $C_0 = \varepsilon A/d$ a dielektrikum nélküli kondenzátor kapacitása.

Dielektrikummal a térerősség ugyanaz, hiszen a feszültség és a lemezek távolsága megegyezik:

$$E = \frac{U_0}{d} = \frac{Q - Q_\mathrm{p}}{\varepsilon_0 A}.$$

Az elektromos teret a kondenzátorlemezek Q töltése és a dielektrikum felületén lévő Q_p polarizációs töltések együttesen hozzák létre (szuperpozíció).

Ebből a két egyenletből:

$$Q_\mathrm{p} = Q - Q_0 = (C - C_0)U_0 = (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\frac{\varepsilon_0 A U_0}{d},$$

ahonnan a felületi polarizált töltéssűrűség:

$$\sigma_\mathrm{p} = \frac{Q_\mathrm{p}}{A} = (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\frac{\varepsilon_0 U_0}{d} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

c) Mivel a szigetelőréteget úgy húzzuk ki, hogy a kondenzátort lekapcsoltuk a feszültségforrásról, ezért a lemezek töltése megmarad, kapacitása C_0-ra csökken:

$$U = \frac{Q}{C_0} = \frac{CU_0}{C_0} = \varepsilon_\mathrm{r} U_0 = 36\ \mathrm{V}.$$

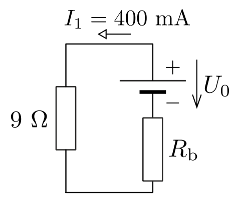
d) A szigetelő lassú kihúzása során a kondenzátor energiája megváltozott, így az általunk végzett munka (feszültségforrás már nincs):

$$W = W_{\mathrm{kond.}}^{\mathrm{vég.}} - W_{\mathrm{kond.}}^{\mathrm{kezd.}} = \frac{1}{2}C_0 U^2 - \frac{1}{2}C U_0^2.$$

Behelyettesítve C, C_0 és U korábbi kifejezéseit:

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{Ad} U_0^2 \varepsilon_\mathrm{r}(\varepsilon_\mathrm{r} - 1) = 5{,}7 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}.$$

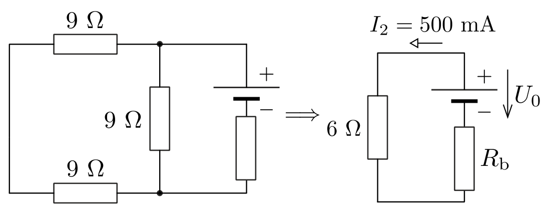
F3. Jelölje R_b a telep belső ellenállását, U_0 a telep üresjárási feszültségét. A kapcsoló nyitott állása esetén az áramkört az alábbi ábra mutatja.



Huroktörvényt felírva:

$$U_0 = (9\ \Omega + R_\mathrm{b}) \cdot 400\ \mathrm{mA}.$$

Zárt kapcsolóállás esetén két 9 Ω-os ellenállás sorba és velük egy 9 Ω-os ellenállás van párhuzamosan kapcsolva, azaz a kapcsolás ekvivalens egy olyan kapcsolással, amelyben a telephez egy $18 \cdot 9/(18 + 9) = 6$ Ω-os ellenállás van kötve.

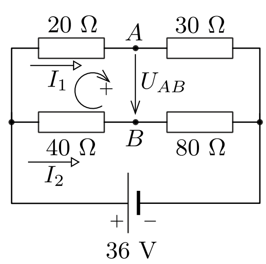


Ismét a huroktörvényt alkalmazva:

$$U_0 = (6\ \Omega + R_\mathrm{b}) \cdot 500\ \mathrm{mA}.$$

A két egyenlet bal oldala azonos, így a jobb is az, amiből $R_\mathrm{b} = 6$ Ω adódik.

F4*. *a*) Használjuk az ábrán látható áram- és feszültségirányokat.



A felső mellékág eredő ellenállása 50 Ω, az alsóé 120 Ω (az AB pontok közé kötött feszültségmérőn nem folyik áram, mert annak nagyon nagy a belső ellenállása). A két áramerősséget meg lehet határozni:

$$50\ \Omega \cdot I_1 = 36\ \text{V} \ \rightarrow\ I_1 = 0{,}72\ \text{A},$$
$$120\ \Omega \cdot I_2 = 36\ \text{V} \ \rightarrow\ I_2 = 0{,}30\ \text{A}.$$

A huroktörvény felhasználásával (az ábrán felrajzolt pozitív irányt véve):

$$20\ \Omega \cdot I_1 + U_{AB} - 40\ \Omega \cdot I_2 = 0 \ \rightarrow\ U_{AB} = -2{,}4\ \text{V}.$$

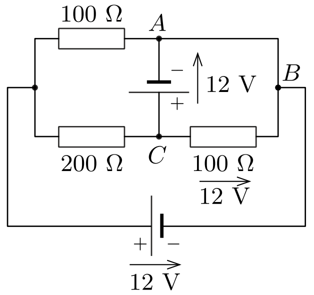
A negatív előjel azt jelenti, hogy a feszültség a B felől az A-ba mutat.

b) Helyettesítsük R-rel a 30 Ω-os ellenállást. Ekkor a 20 Ω-os és a 40 Ω-os ellenálláson azonos feszültség esik, valamint az R és a 80 Ω-os ellenállásokon is:

$$20\ \Omega \cdot I_1' = 40\ \Omega \cdot I_2',$$
$$RI_1' = 80\ \Omega \cdot I_2'.$$

Elosztva a két egyeneletet egymással az $R = 40\ \Omega$ eredményt kapjuk.

F5*. *a*) Az ábrán látható ABC hurokban lévő 100 Ω-os ellenállás feszültsége a huroktörvény miatt 12 V. A legalsó hurokban – amiben a 200 Ω-os, az előbbi 100 Ω-os és a 12 V-os telep van – emiatt a 200 Ω-os ellenálláson 0 V feszültség esik, azaz nem folyik rajta áram.

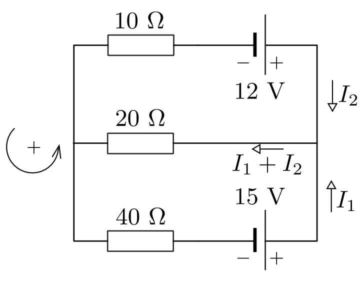


b) A BC pontok közötti ellenálláson 12 V/100 Ω = 0,12 A erősségű áram folyik. A 200 Ω-os ellenállást ki is vehetjük, ekkor a másik 100 Ω-os ellenálláson szintén 12 V esik, hiszen az ACB úton a teljes feszültség nulla. Tehát ezen az ellenálláson is 0,12 A erősségű áram folyik, vagyis a csomóponti törvény miatt az AB ágban nem folyik áram.

c) Mivel áram csak a két 100 Ω-os ellenálláson folyik, ezért

$$P = 2 \cdot 100\ \Omega \cdot (0{,}12\ \text{A})^2 = 2{,}88\ \text{W}.$$

F6*. *a*) Az ábra irányait és jelöléseit használjuk.



A felső hurokra:

$$12\ \text{V} - 10\ \Omega \cdot I_2 - 20\ \Omega \cdot (I_1 + I_2) = 0.$$

A nagy hurokra:

$$12\ \text{V} - 10\ \Omega \cdot I_2 + 40\ \Omega \cdot I_1 - 15\ \text{V} = 0.$$

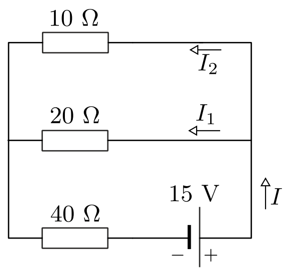
Egyszerűsítve:

$$10I_1 + 15I_2 = 6,$$
$$40I_1 - 10I_2 = 3.$$

Megszorozva az elsőt 4-gyel, majd a kettőt kivonva egymásból az $I_2 = 0{,}3$ A áramerősséget kapjuk. Visszahelyettesítve $I_1 = 0{,}15$ A, míg a kettő összege $I_1 + I_2 = 0{,}45$ A.

b) Szuperpozíció elvét úgy használhatjuk fel, hogy az egyik telepet meghagyjuk, a másik helyére vezetéket képzelünk, és kiszámoljuk az áramerősségeket. Ezután ugyanezt végrehajtjuk csak a másik telepet hagyjuk meg.

1. eset. A kapcsolás az ábrán látható.



A kapcsolás eredő ellenállása

$$R_\text{e} = 40\ \Omega + \frac{10\ \Omega \cdot 20\ \Omega}{10\ \Omega + 20\ \Omega} = \frac{140}{3}\ \Omega.$$

A főágbeli áramerősség

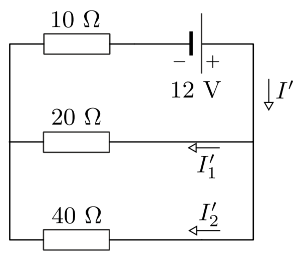
$$I = \frac{15\ \text{V}}{R_\text{e}} = \frac{9}{28}\ \text{A}.$$

A huroktörvény miatt:

$$20\ \Omega \cdot I_1 = 15\ \text{V} - 40\ \Omega \cdot I \ \rightarrow\ I_1 = \frac{3}{28}\ \text{A}.$$

A csomóponti törvény miatt $I_2 = I - I_1 = \frac{3}{14}$ A.

2. eset. A kapcsolást az alábbi ábrán láthatjuk.



A kapcsolás eredő ellenállása

$$R'_\mathrm{e} = 10\ \Omega + \frac{20\ \Omega \cdot 40\ \Omega}{20\ \Omega + 40\ \Omega} = \frac{70}{3}\ \Omega.$$

A főágbeli áramerősség

$$I' = \frac{12\ \mathrm{V}}{R'_\mathrm{e}} = \frac{18}{35}\ \mathrm{A}.$$

A huroktörvény miatt:

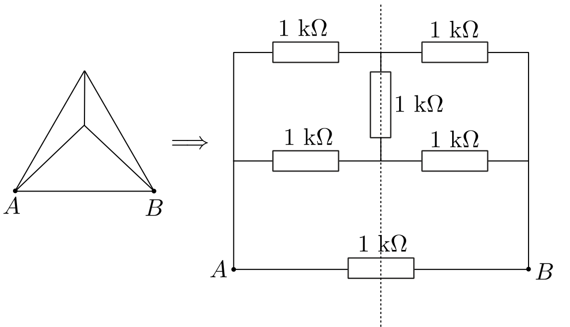
$$20\ \Omega \cdot I'_1 = 12\ \mathrm{V} - 10\ \Omega \cdot I' \ \rightarrow\ I'_1 = \frac{12}{35}\ \mathrm{A}.$$

A csomóponti törvény miatt $I'_2 = I' - I'_1 = \frac{6}{35}$ A.

A két esetet egymásra szuperponálva az egyes ellenállásokon átfolyó áramok erőssége (az irányokat figyelembe kell venni):

$$10\ \Omega : I' - I_2 = 0{,}3\ \mathrm{A},$$
$$20\ \Omega : I_1 + I'_1 = 0{,}45\ \mathrm{A},$$
$$40\ \Omega : I - I'_2 = 0{,}15\ \mathrm{A}.$$

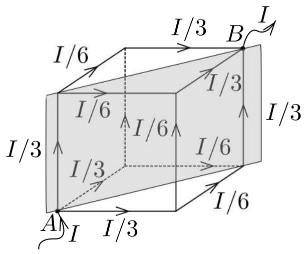
F7*. *a*) Rajzoljuk át a kapcsolást. A szimmetriasíkban lévő ellenálláson nem folyik áram, hiszen a szimmetria miatt a síkra merőleges ágakban ugyanakkora áram folyik.



Az AB pontok közötti eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2\ \mathrm{k\Omega}} + \frac{1}{2\ \mathrm{k\Omega}} + \frac{1}{1\ \mathrm{k\Omega}} \ \rightarrow\ R_{AB} = 0{,}5\ \mathrm{k\Omega}.$$

b)** Vezessünk be I áramot az A pontba és vezessük el a B pontból. A rendszer a testátló irányából nézve szimmetrikus, így az áramok is követik ezt a szimmetriát. Az ábrán a szürke sík a szimmetriasík.

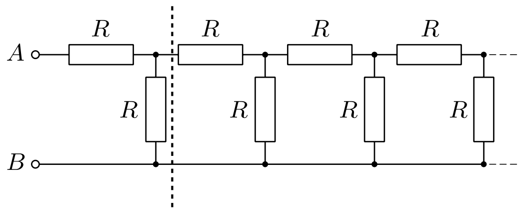


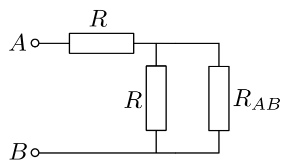
Az A és B pontok közötti éleken végigmenve:

$$1\ \mathrm{k\Omega} \cdot \frac{I}{3} + 1\ \mathrm{k\Omega} \cdot \frac{I}{6} + 1\ \mathrm{k\Omega} \cdot \frac{I}{3} = R_{AB} I.$$

Innen $R_{AB} = 5/6\ \mathrm{k\Omega}$.

F8.** Ha leválasztjuk az első egységet a kapcsolásból, az ellenállás nem változik, hiszen végtelen sok ilyen egységből áll.





Ennek a kapcsolásnak az eredő ellenállása:

$$R_{AB} = R + \frac{R R_{AB}}{R + R_{AB}},$$

amiből R_{AB}-re az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk

$$R_{AB}^2 - R R_{AB} - R^2 = 0.$$

A fizikailag értelmes (pozitív) megoldás:

$$R_{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R.$$