Fizika 2i, tavaszi félév, 3. gyakorlat - MEGOLDÁS

Otthoni gyakorlásra szánt feladatok

H1*. Síkkondenzátorok esetén a térerősség és a feszültség kapcsolata:

$$U = Ed,$$

ahol d a lemezek közötti távolság. Az arányosság érvényes a kondenzátorra maximálisan rákapcsolható feszültségre és térerősségre is (átütési szilárdságra), így az a) esetben:

$$U_{\mathrm{max,a}} = E_{\mathrm{max,a}} d = 4 \text{ kV},$$

míg a b) esetben:

$$U_{\mathrm{max,b}} = E_{\mathrm{max,b}} d = 40 \text{ kV}.$$

Megjegyzés: Az egyenes arányosság miatt adott átütési szilárdság esetén az átütési feszültség már nem függ a dielektromos állandótól (relatív permittivitástól), ugyanakkor a fegyverzeteken maximálisan felhalmozható töltések nagysága igen, mivel a kapacitást a dielektrikum növeli.

H2*. Legyen az 1. kondenzátor kapacitása $C_1 = 4\ \mu$F, a 2. kapacitása $C_2 = 6\ \mu$F. Mivel:

$$Q_i = C_i U_i,$$

és tudjuk, hogy $U_{\mathrm{max,1,2}} = 200$ V, ezért megadhatjuk az egyes kondenzátorokra maximálisan felvihető töltést is ($Q_{\mathrm{max,1,2}}$). Ugyanakkor a soros kapcsolás miatt:

$$Q_1 = Q_2 = Q,$$

így a rendszerre felvihető maximális Q töltés a két kondenzátorra külön-külön felvihető maximális töltés közül a kisebbik. Matematikailag:

$$Q = \min\{Q_{\mathrm{max,1}}; Q_{\mathrm{max,2}}\}.$$

A megadott adatok alapján $Q = Q_{\mathrm{max,1}}$. Innen a kondenzátorra kapcsolható maximális U feszültség:

$$U = \frac{Q}{C} = Q\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = U_{\mathrm{max,1,2}}\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right),$$

amiből $U = 333$ V adódik.

H3*. a) Kezdetben a kondenzátorok össztöltése rendre $Q_1 = C_1 U_0$ és $Q_2 = C_2 U_0$ a párhuzamos kapcsolás következtében ($Q_1 > Q_2$). Mind a pozitív, mind a negatív elektródákon a teljes felhalmozott töltés $Q_0 = \pm(Q_1 + Q_2)$. Amikor a kondenzátorokról a telepet eltávolítjuk, valamint ellentétes polaritással összekötjük őket, töltésátrendeződés történik. Az "új" pozitív, illetve a negatív elektródák össztöltése $Q' = \pm(Q_1 - Q_2)$, hiszen Q_2-nyi töltés semlegesítődik a polaritáscsere miatt. Mivel a kondenzátorok ebben az esetben is párhuzamosan vannak kapcsolva, a kialakuló "új" U' feszültség:

$$U' = \frac{Q'}{C} = U_0\frac{Q'}{Q_0} = U_0\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2},$$

amiből U'-re 5 V adódik.

b) A teljes energiaváltozást a két kondenzátor energiaváltozásának összege adja:

$$\Delta E = E' - E_0 = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\right)\left(U'^2 - U_0^2\right),$$

ahonnan $\Delta E = -15\ \mu$J.

H4*. A feladatban a bal oldali *ábrán* a madár a két a lábát egy ideális vezetékre helyezi ($R \approx 0$), ami azt jelenti, hogy a vezetékdarabon, így a madáron gyakorlatilag nem esik feszültség, nem fejlődik teljesítmény. A jobb oldali *ábrán* ezzel szemben a madár két lába az áramkörbe kapcsolt fogyasztó két oldalán van, amelyek (a fogyasztó véges R ellenállása miatt) különböző potenciálon vannak. Ekkor a madáron eső feszültség a fogyasztón eső feszültséggel egyezik meg (a "párhuzamos kapcsolás" miatt), és mivel a madár R_{mad} ellenállása is véges, ezért rajta $\frac{U^2}{R_{\mathrm{mad}}}$ teljesítmény "esik", amit a hétköznapokban áramütésnek hívunk.

H5*. Alkalmazzuk az Ohm-törvényt (huroktörvényt) a teljes áramkörre:

$$U_0 = IR_b + U_k,$$

ahol U_0 az üresjárási feszültség (12 V), R_b a feszültségforrás belső ellenállása (0,05 Ω), I az áramerősség (80 A), U_k pedig a keresett kapocsfeszültség. A megadott adatokkal számolva U_k-ra 8 V adódik.

H6*. Az áramforrás R_b belső ellenállása és a fogyasztó R_f ellenállása sorosan van kapcsolva, így az áramkörben $I = U/(R_b + R_f)$ áram folyik. A fogyasztó teljesítménye

$$P_f = I^2 R_f = \frac{U^2 R_f}{(R_b + R_f)^2}.$$

Ennek a maximumát keressük rögzített U és R_b mellett. Ehhez az R_f szerinti parciális deriváltnak el kell tűnnie:

$$\frac{\partial P_f}{\partial R_f} = \frac{U^2}{(R_b + R_f)^2} - 2\frac{U^2 R_f}{(R_b + R_f)^3} = 0.$$

A keresett ellenállás $R_f = R_b = 10\ \Omega$, és behelyettesítéssel a leadott teljesítmény

$$P_f = U^2/(2R_f) = 4{,}05 \text{ W}.$$

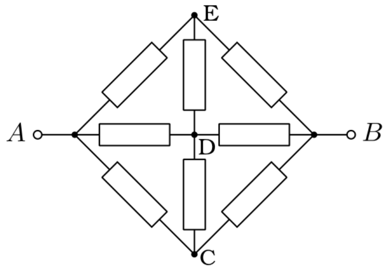
H7*. Jelölje az első üvegcső keresztmetszetének nagyságát A. A V térfogatú higany ebben $h = V/A$

magasan áll. Ennek megfelelően a higanyoszlop ellenállása $R = \varrho h/A$, ahol ϱ a higany fajlagos ellenállása. A második üvegcső belső átmérője fele az elsőének, ennek megfelelően a keresztmetszetének nagysága negyede lesz ($A' = A/4$), hiszen a felület az átmérő négyzetével arányos ($A = d^2\pi/4$). Negyedakkora keresztmetszeten az azonos mennyiségű higany négyszer olyan magasan fog állni ($h' = 4h$). Így a második esetben a higanyoszlop ellenállása $R' = \varrho h'/A' = 16\varrho h/A = 16R$, azaz az ellenállás tizenhatszorosára nő. Ahhoz, hogy az oszlopon átfolyó áram ne változzon, a rákapcsolt feszültséget is tizenhatszorosára kell növelni: $U' = 16U = 16 \times 1{,}5$ V $= 24$ V.

H8*. A vezető karikát a két negyedelő pontja két párhuzamosan kapcsolt részre osztja. Mivel az ellenállás a vezető hosszával arányos, ezért a negyedkörív ellenállása $R/4$, a háromnegyedé pedig $3R/4$. Az eredő ellenállás

$$R_e = \frac{\frac{R}{4} \cdot \frac{3R}{4}}{\frac{R}{4} + \frac{3R}{4}} = \frac{3R}{16} = 7{,}5\ \Omega.$$

H9*. *a*) A kapcsolás szimmetriájából következik, hogy a C és D, illetve az E és D pontok között nem folyik áram. Így az ezen pontok közti ellenállások elhagyhatóak és az egész kapcsolás helyettesíthető három párhuzamosan kapcsolt, egyenként $2R$ nagyságú ellenállással.



Így az eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \quad \rightarrow \quad R_e = \frac{2R}{3}$$

b) Az alsó és felső, ellenállást nem tartalmazó hurok miatt mindhárom ellenállás egyik vége azonos potenciálon van, mint az A pont, míg a másik vége azonos potenciálon van, mint a B pont. Így a kapcsolás megegyezik három darab párhuzamosan kapcsolt R ellenállással:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \quad \rightarrow \quad R_e = \frac{R}{3}$$

H10*. *a*) A 100 Ω-os ellenállás két oldala között 12 V feszültségesés van, mivel ezek a felső telep kivezetéseivel vannak egy potenciálon, így

$$I_1 = U_1/R_1 = 120 \text{ mA}.$$

b) A felső telep pozitív és alsó telep negatív kivezetése egy potenciálon vannak, az ellentétes oldalak között így 24 V feszültség van, ami a 200 Ω-os ellenállásokra esik. Ennek megfelelően a rajtuk áthaladó áram $I_{2,3} = 120$ mA. Alkalmazva Kirchhoff csomóponti törvényét a B pontra, a két oldalról befolyó 120-120 mA áram az A pont irányába távozik, összesen 240 mA áramerősséggel.

c) Az áramkörben fejlődő teljes Joule-hőt az ellenállásokon végzett teljesítmények összegéből kapjuk

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3.$$

Felhasználva, hogy mindegyik áramerősség 120 mA, és az ellenállások ismert értékét

$$P = 7{,}2 \text{ J}.$$

H11.** *a*) Amennyiben a kondenzátorlemezek között vákuum van, a kapacitás értéke $C_0 = \epsilon_0 A/d$, a lemezek közötti térerősség $E_0 = U_0/d$, ahol $U_0 = Q/C_0$ a lemezekre kapcsolt feszültség, Q pedig a lemezeken lévő töltés. Ha a vákuum helyett ϵ relatív permittivitású anyag tölti ki a teret, akkor a térerősség ϵ-ad részére csökken, $E = E_0/\epsilon$. Emiatt az *a*) esetben a lemezek közötti feszültség értéke $U = d_1 E_0/\epsilon_1 + d_2 E_0/\epsilon_2$, ahol d_1 és d_2 a két különböző réteg vastagsága, a feladat szövege szerint $d_1 = xd$ és $d_2 = (1-x)d$. Másrészt a feszültség definíció szerint a töltés és kapacitás hányadosa, azaz:

$$E_0\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right) = \frac{Q}{C_0 d}\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right) = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}\right) = Q\left(\frac{d_1}{\epsilon_0\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_0\epsilon_2 A}\right) = \frac{Q}{C}$$

Tehát a kapacitás:

$$\frac{1}{C} = \underbrace{\frac{d_1}{\epsilon_0\epsilon_1 A}}_{C_1} + \underbrace{\frac{d_2}{\epsilon_0\epsilon_2 A}}_{C_2}$$

Azaz úgy tekinthetünk erre az elrendezésre, mint két sorbakapcsolt síkkondenzátorra d_1 és d_2 vastagsággal és ϵ_1 és ϵ_2 relatív permittivitással. Az eredő kapacitás értéke:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(1-x)\epsilon_1 + x\epsilon_2}$$

b) Ebben az esetben a rendszerünk két párhuzamosan kapcsolt síkkondenzátorral helyettesíthető. Az ϵ_1 relatív permittivitású anyaggal töltött kondenzátor felülete $A_1 = xA$, míg az ϵ_2-vel töltötté $A_2 = (1-x)A$. Így a kapacitásuk $C_1 = \epsilon_0\epsilon_1 A_1/d = \epsilon_0\epsilon_1 Ax/d$ és $C_2 = \epsilon_0\epsilon_2 A_2/d = \epsilon_0\epsilon_2 A(1-x)/d$. Az eredő kapacitás:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{d}\big(x\epsilon_1 + (1-x)\epsilon_2\big)$$