Függvénygörbe alatti terület – a határozott integrál

Tekintsük az $f(x)=x^2$ függvényt a $[0;5]$ intervallumon. Adjunk becslést a görbe, az x tengely és az $x=5$ egyenes közötti síkidom területére! Jelöljük ezt a területet I-vel! A becslést legegyszerűbben egy téglalapokból álló síkidom segítségével végezhetjük el.
Osszuk fel az intervallumot n részre az

$$x_0=0,\ x_1=\frac{5}{n},\ x_2=2\frac{5}{n},\ \ldots,\ x_i=i\frac{5}{n},\ \ldots,\ x_n=n\frac{5}{n}$$

pontokkal. (Két osztópont között a távolság: $5/n$)
Számítsuk ki az $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_i,x_{i+1}],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ részintervallumok feletti olyan téglalapok területét, amiknek magassága a függvény értéke a részintervallumok bal végpontjában.
Az i-edik téglalap területe: $\left((i-1)\left(\frac{5}{n}\right)\right)^2\frac{5}{n}$.
Adjuk össze ezeket a területeket! Az alábbi összeget kapjuk:

$$s_n^{(1)}=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\ldots+$$
$$+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=0\frac{5}{n}+\left(\frac{5}{n}\right)^2\frac{5}{n}+\left(2\frac{5}{n}\right)^2\frac{5}{n}+\ldots+\left[(n-1)\frac{5}{n}\right]^2\frac{5}{n}=$$
$$=\frac{5^3}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

A kapott közelítő összeg nyilvánvalóan kisebb, mint I, azaz $s_n<I$.
Összegezzük most a fenti részintervallumok feletti olyan téglalapok területét, amelyeknek magassága a függvény értéke a részintervallum jobboldali végpontjában. Végeredményben az alábbi összeget kapjuk:

$$s_n^{(2)}=\frac{5^3}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\ldots+n^2\right).$$

Ez az összeg felülről közelíti I-t, tehát $I<s_n^{(2)}$.

Használjuk az első n négyzetszám összegére vonatkozó képletet, akkor a következőt kapjuk:

$$s_n^{(1)}=\frac{5^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad \text{és} \quad s_n^{(2)}=\frac{5^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Finomítsuk a felosztást! Mi történik $n \to \infty$ esetén?

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^3}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} = \frac{5^3}{6} \cdot 2 = \frac{5^3}{3}$$

(mivel $\frac{n-1}{n} \to 1$, $\frac{2n-1}{n} \to 2$),

hasonlóképpen $\lim s_n^{(1)} = \frac{5^3}{3}$.

Azt kaptuk, hogy az *I*-re vonatkozó alsó becslések és felső becslések sorozatai egyaránt egy véges számhoz, $5^3/3$ -hoz tartanak, ezért ezt a számot elfogadhatjuk a terület mérőszámának.

Ezt a számot az x^2 függvény $[0;5]$ intervallumon vett *határozott integráljának* nevezzük és így jelöljük:

$$I = \int_0^5 x^2 dx .$$

A példában látott módon definiáljuk egy tetszőleges $f(x)$ függvénynek egy adott $[a,b]$ intervallumon vett határozott integrálját (azzal a különbséggel, hogy az egyes "kis" téglalapok magassága nem az intervallum bal vagy jobb végpontjában, hanem valahol az intervallum belsejében vett függvényérték).

Egyszerűbb esetekben a határozott integrál az $f(x)$ függvény az $F(x)$ primitív függvénye segítségével, a *Newton-Leibniz formulával* egyszerűen kiszámolható:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Mivel az x^3 függvény primitív függvénye $F(\mathrm{x}) = \frac{x^3}{3}$, így

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{5^3}{3} ,$$

amely megegyezik korábbi eredményünkkel.

Bonyolult $f(x)$ függvények esetén, vagy olyan esetekben, amikor a primitív függvény nem létezik a határozott integrál kiszámítása ténylegesen is a fentiekhez hasonló közelítő összegek segítségével történik. A számítógépek elterjedése és az alkalmazott numerikus módszerek lehetővé teszik, hogy az integrálokat akár tetszőleges, előre megadott pontossággal kiszámolhassuk.

A határozott integrál fogalma

Legyen f az $[a,b]$ intervallumon folytonos és nem negatív függvény. Ekkor a Descartes-féle koordináta rendszerben

az $y = f(x)$ egyenletű görbe,

az $[a,b]$ intervallum, valamint

az $x = a$ és $x = b$ egyenletű egyenesek által határolt síkidomot **görbevonalú trapéznak** nevezzük.

Legyen $a < b$ és osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokkal n (nem feltétlenül egyenlő) részre, ahol

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Az

$$[x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \ldots, n$$

intervallumok halmazát az $[a,b]$ intervallum **felosztásának** nevezzük, az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok a felosztás **osztópontjai**. A felosztást $\delta(>0)$**-finomságúnak** mondjuk, ha

$$\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) = \delta \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

A bevezető példában a $[0;5]$ intervallumot n egyenlő részre osztottuk, ezért a felosztás finomsága $\delta_n = 5/n$ volt. Az osztópontok számát növeltük, δ_n egyre kisebb lett, sőt $\delta_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Legyen (Φ_n) az $[a,b]$ intervallum felosztásainak egy sorozata, és δ_n a Φ_n felosztás finomsága $(n = 1,2,\ldots)$. Ha $\lim \delta_n = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $[a,b]$ intervallum felosztásainak (Φ_n) sorozata **minden határon túl finomodik**.

Legyen az $[a,b]$ intervallum egy Φ_n felosztása az

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

osztópontokkal.

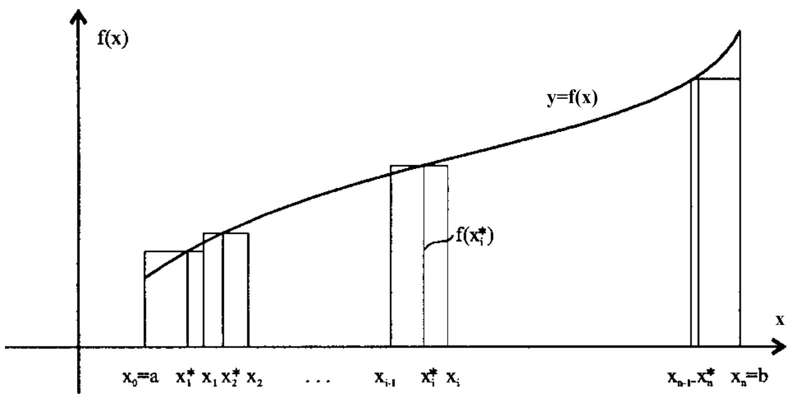
Minden $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ részintervallumon válasszunk egy x_i^* pontot (8.2. ábra), és a részintervallumok fölé rajzoljunk olyan téglalapokat, amelyek magassága rendre

$$f(x_1^*), f(x_2^*), \ldots, f(x_n^*).$$

Ekkor a görbevonalú trapézt közelítőleg lefedő téglalapok területösszege

$$I_n = f(x_1^*)(x_1 - x_0) + f(x_2^*)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n^*)(x_n - x_{n-1})$$

alakban írható fel.



Riemann-féle közelítő összeg

Legyen *f* az $[a,b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény. Ha Φ_n az $[a,b]$ intervallum egy felosztása az $x_0, x_1, .., x_n$ osztópontokkal, és $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ tetszés szerinti valós számok, akkor az

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az *f* függvényhez, a Φ_n felosztáshoz és az $x_1^*, x_2^*, .., x_n^*$ választott helyekhez tartozó **Riemann-féle integrálközelítő összegnek** nevezzük.

Előfordulhat, (ez az *f* függvénytől függ), hogy a felosztás minden határon túl való finomodása esetén az I_n összeg konvergál.

Legyen *f* az $[a,b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény. Akkor mondjuk, hogy *f* az $[a,b]$ intervallumon **integrálható** és **határozott integrálja *I***, ha az $[a,b]$ intervallum tetszés szerinti, minden határon túl finomodó felosztásához tartozó közelítő összegek bármely (I_n) sorozata *I*-hez konvergál.

Az f függvény (a,b) intervallumon vett határozott integrálját a következőképpen jelöljük:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(így olvassuk: "integrál a-tól b-ig ef iksz dé iksz"). Az a: az integrál alsó határa; b: az integrál felső határa.
Ezt az integrált **Riemann-féle integrálnak** nevezzük. Tekintettel arra, hogy később csupán ezzel az integrállal foglalkozunk a "Riemann-féle" jelzőt legtöbbször elhagyjuk.