

Group Theory for Physicists

Exam questions (2024)

1. Definition of the group. Operations on group elements, subsets, and their properties. Multiplication table and its properties.
2. Subgroups, properties, Lagrange's theorem. Normal subgroup, quotient group. Conjugate classes. Direct product of groups.
3. Mappings within and between groups. Homomorphism theorem.
4. Group action, orbit, stabilizer: definitions and properties. Orbit–stabilizer theorem.
5. Most frequent symmetry operations and point groups** in physics, the Schoenflies symbols and Hermann–Mauguin symbols*** (international notation***). Point groups compatible with crystals**.
6. Representations. Regular representation. Equivalence of representations. Reducible and irreducible representations. Maschke's theorem**.
7. Schur's lemmas.
8. Fundamental/Grand orthogonality theorem (Schur orthogonality relations): orthogonality and dimensions of irreducible unitary representations.
9. Completeness of (unitary) irreducible representations, and their dimensions.
10. Characters, character tables. Orthogonality of characters. Number of irreducible representations.
11. ~~Completeness** of irreducible characters. Number and dimensions of irreducible representations.~~
12. Reduction of representations. The P_μ projection operators into the irreducible subspaces, and their properties. The definition of the Π_μ^{jk} “smart projection” operators and their properties.
13. ~~Product representation and its character. Reducibility of product representations. Multiplication table of the irreducible representations. Product representations in physics.~~
14. The consequences of symmetries in harmonic motion: degeneracies and their resolution by perturbation. Selection rules: symmetry aspects of exciting normal modes (showing some simple examples is enough).
15. The consequences of symmetries of a physical system on the quantities describing it: Neumann's principle (general idea and some non-trivial examples on (pseudo)scalar, (pseudo)vectorial and (pseudo)tensorial quantities, for e.g. C_{4v} , C_3 , D_{3h} , T_d symmetries).
16. ~~Elementary consequences of symmetries in quantum mechanics: classification of eigenstates and degeneracies.~~
17. ~~Perturbations in quantum mechanics, degenerate perturbation theory: symmetries and resolution of degeneracies.~~
18. ~~Perturbations in quantum mechanics, non-degenerate perturbation theory: matrix elements in first order calculations. Selection rules and their interpretation. The standard (“chemist’s”) selection rule, and how to make it more specific. Symmetry breaking and appearance of new allowed transitions/matrix elements (in the light of some example(s)).~~
19. ~~The infinitesimal generators of the two– and three–dimensional rotation group. The Lie algebra of the three–dimensional rotation group, and its irreducible representations*.~~
20. ~~The representations and characters of the two– and three–dimensional rotation group. The group-invariant measure of $SO(2)$ and $SO(3)$ **, and reduction of product representations.~~

*If you tell me mark 4 is enough for you *before* getting the exam questions, you do not need to present the proof of this item.

**You do not need to present the proof of this item.

***If you tell me mark 4 is enough for you *before* getting the exam questions, you do not need to know this.

(Version: 2024.12.12. 15:23:16)

Csoportelmélet fizikusoknak

Tételsor (2024)

1. Csoport fogalma. Csoport elemein és részhalmazain értelmezett műveletek. Szorzótábla és tulajdonságai.
2. Részcsoportok, tulajdonságaik. Lagrange-tétel. Normálosztó, faktorcsoport. Konjugált elemosztályok. Csoportok direkt szorzata.
3. Csoportok önmagukra és más csoportokra való leképezései. Homomorfizmus-tétel.
4. Csoportthatás, pálya, stabilizátor. Pálya–stabilizátor-tétel.
5. Fizikában gyakran előforduló szimmetriaműveletek és pontcsoportok**, Schoenflies-szimbólumok, ~~nemzetközi*** (Hermann–Mauguin-féle) jelölés~~. Kristály szimmetriáival kompatibilis pontcsoportok**.
6. Ábrázolások. Reguláris ábrázolás. Ábrázolások ekvivalenciája, felbonthatósága, irreducibilis ábrázolások. Maschke-tétel**.
7. Schur-lemmák.
8. Az ábrázolások fundamentális ortogonalitási tétele: uniter irreducibilis ábrázolások ortogonalitása és dimenziószáma.
9. (Uniter) irreducibilis ábrázolások teljessége, dimenziószáma.
10. Karakterek, karaktértáblák. Irreducibilis karakterek ortogonalitása. Irreducibilis ábrázolások száma.
11. ~~Irreducibilis karakterek teljessége**, irreducibilis ábrázolások száma és dimenziója.~~
12. Ábrázolások irreducibilis felbontása (kiredukálása), az ezekhez tartozó invariáns alterekbe vetítő P_μ operátorok*. A Π_μ^{jk} „okos operátorok” definíciója és tulajdonágai.
13. ~~Direktszorzat-ábrázolás és karaktere. Direktszorzat-ábrázolás reducibilitása, irreducibilis karakterek szorzótáblája. Direktszorzat-ábrázolások a fizikában.~~
14. Harmonikus mozgásegyenlet szimmetriáinak következményei: degenerációk és feloldásuk perturbációval. Normálmódusok gerjeszthetősége adott szimmetriájú perturbációval (elég néhány egyszerű példával szemléltetni).
15. Egy fizikai rendszer szimmetriáinak következményei a rendszert leíró mérhető mennyiségekre: a Neumann-elv (általános elv és speciálisan a (pszeudo)skalár, (pszeudo)vektoriális, (pszeudo)tenzoriális mennyiségek, néhány nem triviális példával, pl. C_{4v} , C_3 , D_{3h} , T_d).
16. ~~Szimmetriák elemi következményei a kvantummechanikában: sajátállapotok osztályozása, degenerációja.~~
17. ~~Perturbációk a kvantummechanikában, degenerált perturbációs számítás: szimmetriák és degenerációk felhasadásának kapcsolata.~~
18. ~~Perturbációk a kvantummechanikában, nemdegenerált perturbációs számítás: mátrixelemek az elsőrendű perturbációs számításban. Kiválasztási szabályok és értelmezésük. A standard („vegyész”) szabály, és a specifikusabb megközelítés. Új mátrixelemek/megengedett átmenetek megjelenése a szimmetriasértés hatására (példákon keresztül).~~
19. ~~A két- és háromdimenziós forgáscsoport infinitezimális generátorai. A háromdimenziós forgáscsoport Lie-algebrája, és annak irreducibilis ábrázolásai*.~~
20. ~~A két- és háromdimenziós forgáscsoport ábrázolásai, karakterei. A két- és háromdimenziós forgáscsoport invariáns mértéke, és irreducibilis ábrázolásai direktszorzatának irreducibilis felbontása.~~

*If you tell me mark 4 is enough for you *before* getting the exam questions, you do not need to present the proof of this item.

**You do not need to present the proof of this item.

***If you tell me mark 4 is enough for you *before* getting the exam questions, you do not need to know this.

(Version: 2024.12.12. 15:23:16)