Fizika Bprof, 13. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1*. *a*) A szűrőben az ionok irány- és sebességváltozás nélkül haladnak, vagyis a rájuk ható erők eredője nulla, tehát az elektromos mező által kifejtett erőt kompenzálja a Lorentz-erő:

$$qE_0 = qvB_0 \ \rightarrow \ v = \frac{E_0}{B_0} = 6 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

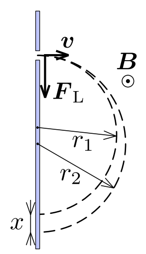
b) Beérve a $\boldsymbol{B}$ indukciójú mágneses mezőbe, az ionok körpályán haladnak a Lorentz-erő hatására:

$$qvB = m\frac{v^2}{r}.$$

Innen a körpálya sugara:

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Látható, hogy a nagyobb tömegű ion (7-es tömegszámú) nagyobb sugarú körpályán mozog (mindkét ion töltése azonos, mert egyszeresen ionizáltak, azaz elektrontöbbletük vagy -hiányuk van). Mivel belépéskor a Lorentz-erő lefelé hat és $\boldsymbol{B}$ a papír síkjából kifelé mutat, ezért a jobbkéz-szabály alapján megállapíthatjuk, hogy az ionok pozitív töltésűek, tehát $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

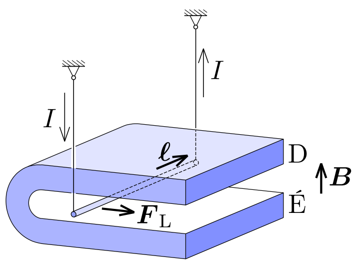


A fotolemezen a két ion becsapódási helyének távolsága:

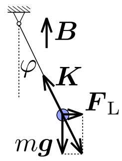
$$x = 2(r_2 - r_1) = \frac{2v}{qB}(m_2 - m_1) = \frac{2m_\mathrm{p}v}{qB} \approx 0{,}13 \ \mathrm{m},$$

ahol $m_\mathrm{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg a proton tömege.

F2. Az áramjárta rúdra Lorentz-erő hat: $\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = I\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$. A jobbkéz-szabály alapján megállapíthatjuk, hogy jobbra térül ki a rúd.



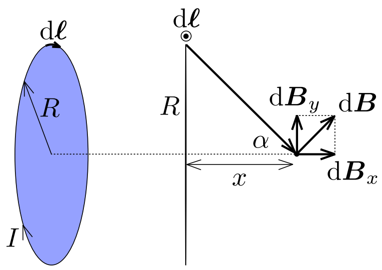
A rúdra ható Lorentz-erő a mozgás során állandó, mivel az áramerősség is állandó. Az egyensúlyi helyzetet az alábbi ábra mutatja oldalnézetből.



Ebben a helyzetben az mg és az F_L erők eredője kötélirányú, azaz:

$$\tan\varphi = \frac{F_\mathrm{L}}{mg} = \frac{I\ell B}{mg} \ \rightarrow \ \varphi \approx 14°.$$

F3*. Az ábrán oldalnézetből láthatjuk a körvezető legfelső, kicsiny $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ ívelemvektorától származó elemi $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ indukcióvektort a körvezető szimmetriatengelyén, a középponttól x távolságra.



Az elemi indukcióvektort a Biot–Savart-törvényből kapjuk meg:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Az irányt ismét a jobbkéz-szabály szerint adhatjuk meg.

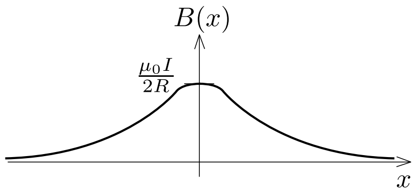
A teljes indukcióvektorhoz a körvonal mentén lévő összes ívelem járulékát kell vektorosan összegezni. Mivel a körvonal összes pontja ugyanakkora r távolságra van a vizsgált ponttól, mindegyik ívelem ugyanakkora nagyságú mágneses indukciót eredményez. Azonban az irány változik, a $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ vektorok egy $180° - \alpha$ félnyílásszögű kúppaláston forognak körbe. Tehát ha felbontjuk az elemi indukcióvektorokat x- és y-irányú komponensekre, akkor összegezve csak az x-irányú komponens marad meg, azaz az eredő indukcióvektor is ilyen irányú lesz. Az x-irányú elemi indukcióvektor nagysága:

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\ell \cdot r}{r^3} \cdot \sin\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\ell}{r^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Ha ezt a teljes körvonalra összegezzük, akkor csak a $\mathrm{d}\ell$ ívelemeket kell összeadni, aminek eredménye a kör kerülete, $2R\pi$. Ezzel a mágneses indukció a tengelyen ($r = \sqrt{R^2 + x^2}$):

$$B(x) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Ez a függvény nagyon nagy x-re nullához tart, legnagyobb értékét az $x = 0$ helyen veszi fel.

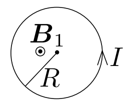


F4*. Bármelyik esetet is tekintjük a mágneses indukciót a szuperpozíció-elvvel adhatjuk meg: az adott pontban a körvezetőtől és a végtelen hosszú, egyenes vezetőtől származó mágneses indukciót összeadjuk figyelve az irányukra.

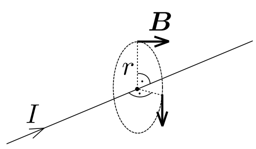
A körvezető középpontjában a mágneses indukció az előző feladat eredménye alapján ($x = 0$):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

irányát a jobbkéz-csavar adja meg, azaz a hüvelykujj mutat az áram irányába, a többi behajlított ujj pedig a mágneses indukció irányát mutatja. Tehát az ábra szerint a középpontban az indukcióvektor a papír síkjából, arra merőlegesen kifelé mutat.



A hosszú, egyenes vezető mágneses terét az Ampère-féle gerjesztési törvényből kapjuk. Az elrendezés hengerszimmetriája miatt a vezetőre merőleges síkban, a vezető körüli r távolságban a mágneses indukció nagysága ugyanakkora, irányát ismét a jobbkéz-csavar határozza meg.



$$B_2(r) \cdot 2r\pi = \mu_0 I \;\to\; B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Az *a*) elrendezésben a körvezető középpontjában mindkét mágneses indukcióvektor a papír síkjából kifelé mutat, vagyis itt a mágneses indukció nagysága:

$$B_a = B_1 + B_2(R) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right) \approx 1{,}1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}.$$

A *b*) esetben a hurokbeli áram iránya ellentétes, azaz $\boldsymbol{B}_1$ is ellentétes irányú lesz. Mivel $B_1 > B_2(R)$, ezért most a hurok középpontjában a mágneses indukció a papír síkjára merőlegesen befelé mutat, nagysága pedig

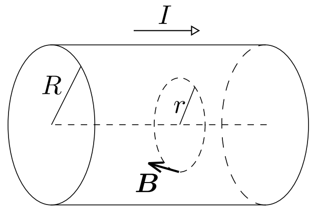
$$B_b = B_1 - B_2(R) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \approx 5{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}.$$

Ha a hurok síkját elforgatjuk úgy, hogy merőleges legyen a vezetékre, akkor $\boldsymbol{B}_1$ is vele együtt fordul el. Tehát bármelyik elrendezést is tekintjük a teljes mágneses indukció nagysága a hurok középpontjában ugyanakkora lesz (az irányuk különböző):

$$B'_{a,b} = \sqrt{B_1^2 + B_2(R)^2} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}} \approx 8{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}.$$

F5*. Ha az áramerősség eloszlása homogén, akkor a vezetőben a tengelye körül vett $r < R$ sugarú hengerben az áramerősség a henger keresztmetszetének felületével arányosan kisebb:

$$I(r) = I \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$



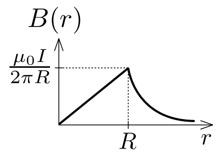
Az Ampère-féle gerjesztési törvény az $r \le R$ esetben (csak a hengeren belüli áram számít):

$$B(r) \cdot 2r\pi = \mu_0 I(r) \;\to\; B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r.$$

Ha pedig $r > R$, akkor a már megismert, hosszú vezeték körüli mágneses teret kapjuk:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Az alábbi ábra a mágneses indukció nagyságát mutatja r függvényében.



F6*. *a*) A cső körülfordulási ideje $T = 2\pi/\omega$. A mozgó töltésektől származó áramerősség a cső ℓ hosszúságú darabjának felületén:

$$I = \frac{\lambda \ell}{T} = \frac{\lambda \ell \omega}{2\pi}.$$

A forgó csövet elképzelhetjük úgy, mint egy szolenoidot: a cső felületén sok, párhuzamos, vékony áramvonal van jelen (ℓ hosszúságú darabon összesen I áram folyik). Az így tekintett szolenoid belsejében a mágneses indukció nagysága az Ampère-féle gerjesztési törvény szerint (kívül nincs mágneses tér):

$$B\ell = \mu_0 I \;\to\; B = \frac{\mu_0 I}{\ell}.$$

Felahsználva I fenti kifejezését:

$$B = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{2\pi} = 3 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{T}.$$

b) Ismét a mozgó töltésektől származó áramerősség:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot \Delta \ell}{\Delta t} = \lambda v.$$

A mozgó rudat hosszú, egyenes vezetőnek gondolhatjuk, így alkalmazhatjuk az arra érvényes formulát a mágneses indukció kiszámításához:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} = 2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{T}.$$

F7****.** *a*) Egy N menetes, L hosszúságú, áramjárta szoledoid belsejében a mágneses indukció nagysága:

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I}{L}.$$

Jelölje B_P a hosszú szolenoid végén, a tengelyen lévő pontban a mágneses indukció nagyságát. Ha két félvégtelen szolenoidot összeillesztünk, akkor egy végtelen szolenoidot kapunk. Tehát a szuperpozíciós elvnek megfelelően $B_0 = 2B_P$, azaz a kérdéses pontban a mágneses indukció nagysága:

$$B_P = \frac{B_0}{2}.$$

b) A tengelyre merőleges, $A = R^2\pi$ területű körlapon átmenő fluxus $\Phi_0 = B_0 A$. Az *a*) részben használt gondolatnak megfelelően, a tekercs végén a fluxus ennek a fele, tehát:

$$\Phi = \frac{B_0 R^2 \pi}{2}.$$

A fluxus másik fele a szolenoid palástján szökik ki.